NOM : PHOMMADY Prénom : Kenny Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 142* - Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

Autre sujet : à savoir

Références : Tauvel, *Algèbre* ; Gourdon, *Algèbre* ; Perrin, *Géométrie algébrique : Une introduction*

Ici, A est un anneau commutatif unitaire intègre, et n un entier supérieur à 2.

I Structure de $A[X_1,\dots,X_n]$

1) Structure algébrique

Définition 1 : On définit par récurrence $A[X_1,\dots,X_n]=A[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]$.

Proposition 2 : $A[X_1,\dots,X_n]$ est engendré comme A-module par les $X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n}$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{N}$

Proposition 3 : Si A est intègre, $A[X_1,\dots,X_n]$ aussi, et $A[X_1,\dots,X_n]^\times = A^\times$.

Théorème 4 (admis) : Si A est ~~resp.~~ noethérien, factoriel, ~~euclidien~~ $A[X_1,\dots,X_n]$ aussi. Faux

Remarque 5 : C'est faux pour principal : $\langle X,Y\rangle$ est un idéal maximal non principal de $\mathbb{C}[X,Y]$.

2) Notions de degrés

Définition 6 : Soit $\alpha\in\mathbb{N}^n$. On note $|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$. Si G est un groupe commutatif $x\in G^n$, on note $x^\alpha=\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$.

Définition 7 : • Soit $P=\sum_{|\alpha|\leq p}a_\alpha X^\alpha$ dans $A[X_1,\dots,X_n]$. • Le degré (total) de P est $\deg P=\max\{|\alpha|\mid a_\alpha\neq 0\}$.

• On dit que P est homogène de degré d si tous les monomes le composant sont de degré d.

Exemple 8 : Les polynômes homogènes ~~de degré~~ 1 sont les $\sum_{i=1}^{m}a_iX_i$ avec au moins un a_i non nul. Ceux de degré 2 sont les $\sum_{i=1}^{m}a_iX_i^2+\sum_{1\leq i\leq j\leq m}b_{ij}X_iX_j$ avec au moins un a_i ou un b_{ij} non nul.

Propriété 9 : Tout $P\in A[X_1,\dots,X_n]$ s'écrit de manière unique $P=\sum_{i=1}^{\deg P}P_i$ où P_i est un polynôme homogène de degré i, ou $P_i=0$.

Proposition 10 : Soient $P,Q\in A[X_1,\dots,X_n]$. On a :
- $\deg(P+Q)\leq\max(\deg P,\deg Q)$ avec égalité si $\deg P\neq\deg Q$.
- $\deg(PQ)=\deg P+\deg Q$) démo ? → Non trivial !

Définition 11 : le degré partiel de P en X_i est $\deg_{X_i}P$ le degré de P vu dans $A[X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n][X_i]$

3) Fonctions polynomiales

$\mathcal{A}$ est une A-algèbre commutative ici

Théorème 12 : Soient $(x_i)_{1\leq i\leq m}\in\mathcal{A}^n$. Il existe un unique $\varphi: A[X_1,\dots,X_n]\longrightarrow\mathcal{A}$ morphisme de A-algèbres tel que $\varphi(X_i)=x_i$. Pour $P\in A[X_1,\dots,X_n]$, on écrit $P(x_1,\dots,x_n)=\varphi(P)$.

Corollaire 13 : Soit $I_a=\{P\in A[X_1,\dots,X_n]\mid P(a_1,\dots,a_n)=0\}$ où $a=(a_1,\dots,a_n)\in A^n$. On a $I_a=\langle X_1-a_1,\dots,X_n-a_n\rangle$

Définition 14 : La fonction polynomiale associée à $P\in A[X_1,\dots,X_n]$ est la fonction $\tilde{P}$ définie par : $\tilde{P}=(x_1,\dots,x_n)\in A^n\longmapsto P(x_1,\dots,x_n)$

Proposition 15 : Si A infini, $A_1,\dots,A_m\subset A$ infinis tels que $\tilde{P}$ est nulle sur $A_1\times\dots\times A_m$. Alors $P=0$.

Remarque 16 : Sur $\mathbb{C}$, tout polynôme non constant dans $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ admet une infinité de racines.

(4) PQ homogène → P et Q le sont.

(9) $\ker\varphi$ dans le cas où $A=\mathbb{F}_q$? Rép. $\langle X^q - X\rangle$

Conséquence 17 : Si A est infini $P \mapsto \tilde{P}$ est injective. ($\equiv \ker\varphi = \{0\}$).

Exemple 18 : si $A=\mathbb{F}_p$, p premier, $P=X^p-X$, alors $\tilde{P}=0$. (9) et pour $A=\mathbb{F}_q$? On a également $\tilde{P}=0$.

II Polynômes symétriques

1) Définitions

Définition 19 : On fait agir $\mathfrak{S}_n$ sur $A[X_1,\dots,X_n]$ par $\sigma . P = P(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})$.
L'ensemble des polynômes symétriques est $A[X_1,\dots,X_n]^{\mathfrak{S}_n}$

Exemple 20 : les constantes sont des polynômes symétriques $X_1X_2X_3^2+X_1X_2^2X_3+X_1^2X_2X_3+1$ aussi pour $A[X_1,X_2,X_3]$.

Propriété 21 : $A[X_1,\dots,X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ est une sous-A-algèbre de $A[X_1,\dots,X_n]$.

2) Polynômes symétriques élémentaires et théorème de structure

Définition 22 : Le k-ème polynôme symétrique élémentaire sur $A[X_1,\dots,X_n]$, pour $k\in[\![1,n]\!]$, est

$$\Sigma_k = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k}$$

Exemple 23 : $\Sigma_1 = \sum_{i=1}^n X_i$; $\Sigma_n = \prod_{i=1}^n X_i$

Développement n°1 :

Théorème 24 : Tout $P\in A[X_1,\dots,X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ s'écrit de manière unique comme
$P=Q(\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)$ avec $Q\in A[X_1,\dots,X_n]$.

Exemple 25 : $X_1^2X_2^2+X_2^2X_3^2+X_1^2X_3^2 = \Sigma_2^2 - 2\Sigma_1\Sigma_3$

Proposition 25 : Soit $P\in A[X]$, $P=\sum_{i=0}^n a_iX^i$ avec $a_n\in A^\times$, que l'on suppose scindé $P=a_n\prod_{i=1}^n(X-\alpha_i)$, alors
$$\Sigma_p(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(-1)^p\frac{a_{n-p}}{a_n}$$

Proposition 26 : On définit pour tout k de $[\![1,n]\!]$, $S_k=\sum_{i=1}^n X_i^k$. On a alors pour tout k
$$S_k+\sum_{p=1}^{k-1}\Sigma_p S_{k-p}(-1)^p + (-1)^k k\Sigma_k = 0$$
idée de la preuve ?

Corollaire 27 : Si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique 0, alors $(S_i)_{1\le i\le n}$ est algébriquement libre et tout $P\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ s'écrit de manière unique
$$P=Q(S_1,\dots,S_n) \text{ avec } Q\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$$

Exemple 28 : Si $\mathrm{Car}(A)=2$, $S_2=S_1^2$.

Corollaire 29 : Si $\mathrm{Car}(\mathbb{K})=0$, $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors M est nilpotente (ssi) $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\mathrm{tr}(M^k)=0$

Proposition 30 (théorème de Kronecker) : Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ irréductible de racines dans $\bar{B}(0,1)$. Alors $P=X$ ou P est un polynôme cyclotomique (fait 1 dév^t).

III Prélude à la géométrie algébrique

Dans toute cette partie, k est un corps algébriquement clos.

1) Géométrie affine

Définition 31 : Soit $S\subset k[X_1,\dots,X_n]$. L'ensemble algébrique affine (eaa) défini par S est $V(S)=\{x\in k^n \mid \forall P\in S, P(x)=0\}$.

Remarque 32 : Si $\langle S\rangle$ est l'idéal engendré par S, $V(S)=V(\langle S\rangle)$.

Exemples 33 :
- Si $S\subset k[X]$, $S\neq 0$, $V(S)$ est un ensemble fini.
- $V(X)=V(X^2)=\{(x,y)\mid x=0\}$ dans k^2
- Si $x\in k^n$, $\{x\}$ est un eaa défini par $\{X_1-x_1,\dots,X_n-x_n\}$.
- $SL_n(k)$, $O_n(k)$ peuvent être vus comme des eaa.

Propriétés 34 :
- Tout eaa peut être défini par un nombre fini de polynômes
- Si I, I' sont des idéaux de $k[X_1,\dots,X_n]$,
  - si $I\subset I'$, $V(I')\subset V(I)$.
  - $V(I)\cap V(J)=V(\langle I,J\rangle)$
  - $V(I)\cup V(J)=V(IJ)$.

Définition 35 : Soit $V\subset k^n$. On définit l'idéal de V par $I(V)=\{f\in k[X_1,\dots,X_n] \mid \forall x\in V, f(x)=0\}$.

Exemple 36 : $I(V(Y^2-X^3))=\langle Y^2-X^3\rangle$. preuve ? chiant.

Proposition 37 : Si $V\subset V'$, $I(V')\subset I(V)$

Proposition 38 : Si V est un eaa, J un idéal de $k[X_1,\dots,X_n]$,
- $V(I(V)) = V$, • $J \subset I(V(J))$

Exemple 39 : pour $n=2$, si $J = \langle x^2 \rangle$, $I(V(J)) = \langle x \rangle$.

Définition 40 : Soit B un anneau commutatif et J un idéal de B. On définit le radical de J comme
$$\mathrm{rac}(J) = \{x \in B \mid \exists r > 0 \mid x^r \in J\}$$
J est radical si $J = \mathrm{rac}(J)$.

Exemple 41 : Si B est factoriel, et si $a \in B$ de produit en irréductibles $a = u \prod_{i=1}^{r} a_i^{\alpha_i}$ (les a_i sont irréductibles distincts, $u \in B^\times$, $\alpha_i > 0$) alors $\mathrm{rad}(\langle a \rangle) = \langle \prod_{i=1}^{r} a_i \rangle$.

dans **Développement n°2 :**

Théorème 42 (Nullstellensatz) : Soit J un idéal de $k[X_1,\dots,X_n]$, alors $I(V(J)) = \mathrm{rac}(J)$

2) Géométrie projective

Définition 43 : Soit $P \in k[X_0,\dots,X_n]$, $P = \sum_{j=0} P_j$ sa décomposition en polynômes homogènes, avec $\deg P_j = j$ ou $P_j = 0$. Pour $x \in \mathbb{P}^n(k)$, on dit que $P(x) = 0$ si pour x_0 une préimage de x dans $k^{n+1} \setminus \{0\}$, on a $P_j(x_0) = 0 \ \forall j \in [\![0,d]\!]$.

« Définition » 44 : On définit alors $V(J)$ et $I(V)$ comme précédemment.

Proposition/définition 45 : Soit J un idéal de $k[X_0,\dots,X_n]$. On a l'équivalence :
(i) J est engendré par des polynômes homogènes
(ii) $\forall f \in J$, $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$ sa décomposition en polynômes homogènes, on a $\forall i \in [\![0,d]\!]$, $f_i \in J$
Dans ce cas, J est dit homogène.

Conséquence 46 : Si V est un espace algébrique projectif, $I(V)$ est homogène.

Remarque 47 : $V(\langle X_0,\dots,X_n \rangle) = \emptyset$

Théorème 48 (Nullstellensatz projectif) : Soit J un idéal homogène de $k[X_0,\dots,X_n]$. $V = V(J)$. On a alors :
- $V = \emptyset \iff \langle X_0,\dots,X_n \rangle \subset \mathrm{rac}(J)$
- si $V \neq \emptyset$, $I(V(J)) = \mathrm{rac}(J)$.

- Dév 1 peu trop long
- Intro : bien de commencer par une utilisation polynôme symétrique élémentaire ~~attention~~

- Plus de choses sur :
  - ▷ polynômes symétriques et coeff racines
  - ▷ résultant, discriminant (irréductible dans $\mathbb{K}[X_{ij}, X_{ij}, \dots]$)