NOM : MICHAUD Prénom : Robin Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 140 - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif - Applications.

Autre sujet :

Références : Ramis-Deschamps-Odoux : Algèbre 1, Lelong-Ferrand-Arnaudiès, FG J. Calais

<u>K désignera un corps commutatif</u>

I - Fractions rationnelles

1. Généralités

Définition 1 : On appelle corps des fractions rationnelles à coefficients dans K le corps des fractions de l'anneau $K[X]$, et on le note $K(X)$.

Proposition 2 : $K[X]$ s'injecte dans $K(X)$ via le morphisme

$$K[X] \hookrightarrow K(X)$$
$$P \longmapsto \frac{P}{1}$$

Proposition 3 : Pour tout $F \in K(X)$, il existe $P, Q \in K[X]$ tels que $F = \frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$, uniques à constante multiplicative près. On appelle cela la forme irréductible de F.

Exemple 4 : $\frac{X-1}{X^2+X+1}$ est la forme irréductible de $\frac{X^2+X-2}{X^3+3X^2+3X+2}$.

Proposition 5 : Soit $F \in K(X)$, $A, B \in K[X]$ tels que $F = \frac{A}{B}$. Alors $\deg(F) := \deg(A) - \deg(B)$ est indépendant du choix des représentant $\frac{A}{B}$. On l'appelle degré (ou degré total) de F.

Proposition 6 : Si $F, G \in K(X)$

- $\deg(F+G) \leq \sup(\deg(F), \deg(G))$
- $\deg(F \cdot G) = \deg(F) + \deg(G)$

2 - Pôles

Définition 7 : Soit $F = \frac{P}{Q} \in K(X)$ sous forme irréductible. L'ensemble des racines de Q dans une extension L de K est appelé ensemble des pôles de F. Leur ordre de multiplicité est leur ordre de multiplicité dans Q. Le complémentaire de cet ensemble dans L est appelé l'ensemble de définition de F dans L.

Définition 8 : Si on note $D_{F,L}$ l'ensemble de définition de F dans L, l'application

$$D_{F,L} \longrightarrow L$$
$$x \longmapsto \tilde{F}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

est appelée fonction rationnelle associée à F dans L.

Remarque 9 : $D_{F,L}$ peut être vide : si K est fini, $L = K$, et $F = \frac{1}{Q}$ avec $Q = \prod_{\alpha \in K}(X - \alpha)$

Proposition 10 : Si K est infini, $F_1 \in K(X), F_2 \in K(X)$. Alors si $\tilde{F_1}(x) = \tilde{F_2}(x)$ $\forall x \in D_{F,K}$, alors $F_1 = F_2$

Proposition / définition 11 : Soit $F \in K(X)$, alors la fraction rationnelle $\frac{BA' - AB'}{B^2}$ est indépendante du choix du représentant $\frac{A}{B}$ de F. On l'appelle dérivée de F et on la note F'.

Proposition 12 : F' a les mêmes pôles que F.

Proposition 13 : $\forall F, G \in K(X)$, $\forall \lambda \in K$,

- $(F+G)' = F' + G'$
- $(\lambda F)' = \lambda F'$
- $(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'$

Proposition 14 : Si k est de caractéristique nulle,

$$F' = 0 \Rightarrow F \text{ est constante.}$$

Contre-exemple 15 : Si $k = \mathbb{F}_p$, $F = \frac{X^p}{1}$, ou $F = \frac{1}{X^p}$.

3 - Le corps $k(X)$

Proposition 16 : Soit k' un autre corps commutatif et φ un isomorphisme de k sur k'. Alors il existe un unique isomorphisme $\tilde{\varphi} : k(X) \longrightarrow k'(Y)$ qui prolonge φ et qui envoie X sur Y.

Proposition 17 : Si L est une extension de k, $\alpha \in L$, alors α est transcendant sur k si et seulement si $k(\alpha) \simeq k(X)$.

DV1

Proposition 18 : Les automorphismes d'algèbre de $k(X)$ sont les applications

$$\begin{aligned} k(X) &\longrightarrow k(X) \\ F &\longmapsto F\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) \end{aligned}$$

avec $(a,b,c,d) \in k^4$ et $ad - bc \neq 0$.

→ Francinous.

II - Décomposition en éléments simples

1 - Étude théorique

Théorème 19 : À toute fraction rationnelle $F \in k(X)$, on peut associer un unique polynôme E tel que $\deg(F-E) < 0$. On dit que E est la partie entière de F.

non necessaire.

Remarque 20 : $k(X) = k[X] \oplus k_-(X)$ où $k_-(X) = \{F \in k(X) \mid \deg F < 0\}$

Remarque 21 : $E = 0 \Leftrightarrow \deg(F) < 0$.

Exemple 22 : La partie entière de $\dfrac{X^3 - X + 2}{X^3 + 3X^2 - 1}$ est 1.

Remarque 23 : E est le quotient dans la division euclidienne de P par Q.

Lemme 24 : Soient $A, B_1, B_2 \in k[X]$, tels que $B_1 \wedge B_2 = 1$ et $\deg(A) < \deg(B_1 \cdot B_2)$. Alors il existe un unique couple $(A_1, A_2) \in k[X]^2$ tel que $\dfrac{A}{B_1 B_2} = \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2}$

avec $\deg\left(\frac{A_1}{B_1}\right) < 0$, $\deg\left(\frac{A_2}{B_2}\right) < 0$.

Lemme 25 : Soient $A \in k[X]$, $B_1 \dots B_n \in k[X]$ premiers entre eux deux à deux, tels que $\deg(A) < \deg(B_1 \cdots B_n)$. Alors il existe un unique n-uplet $(A_1, \dots, A_n) \in k[X]$ tels que

$$\frac{A}{B_1 \cdots B_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{B_i} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ \deg\left(\frac{A_i}{B_i}\right) < 0.$$

Lemme 26 : Soit $Q \in k[X]^*$, $k \in \mathbb{N}$, et $C \in k[X]$ tel que $\deg(C) < \deg(Q^k)$. Il existe un unique k-uplet $(P_1, \dots, P_k) \in k[X]$ tels que

$$\frac{C}{Q^k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{P_j}{Q^j} \quad \text{avec} \quad \deg\left(\frac{P_j}{Q}\right) < 0 \quad \forall j \in [\![1,k]\!].$$

Définition 27 : Une fraction rationnelle de la forme $\frac{P}{Q^k}$ où Q est irréductible et $\deg(P) < \deg(Q)$ est appelée un élément simple.

Théorème 28 : Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle sous forme irréductible. Si $\lambda Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_n^{\alpha_n}$ est la décomposition de Q en polynômes irréductibles unitaires, alors il existe une unique famille de $1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ polynômes notés E, et $(P_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le \alpha_i}}$

tels que :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{ij}}{(Q_i)^j} \right) \quad \text{et} \quad \deg\left(\frac{P_{ij}}{Q_i}\right) < 0$$

C'est la décomposition de F en éléments simples.

des trucs peuvent se mettre en annexe.

2 - Pratique de la DES

<u>Définition 29</u> : Si a est un pôle d'ordre k de F, dans la partie polaire $\sum \frac{\alpha_j}{(X-a)^j}$, le coefficient α_1 est dit résidus de F au pôle a, et on le note $Res(F,a)$.

<u>Proposition 30</u> : Soit $F \in k(X)$ telle que $\deg(F) < -1$. Alors
$$\sum_{\substack{a \text{ pôle} \\ \text{de } F}} Res(F,a) = 0$$

<u>Théorème 31</u> : Soient $A, B \in k[X]$ tels que $B(0) \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(Q,R) \in k[X]^2$ tel que
$$A = BQ + X^{n+1}R \quad \text{et } \deg(Q) \leq n$$
$n \in \mathbb{N}$

(Division suivant les puissances croissantes)

<u>Proposition 32</u> : La partie polaire relative à un pôle simple a de $F = \frac{P}{Q}$ est $\frac{P(a)}{Q'(a)} \cdot \frac{1}{X-a}$.

<u>Théorème 33</u> : Soit $\frac{P}{X^k Q}$ une fraction rationnelle irréductible telle que $Q(0) \neq 0$ (0 est pôle d'ordre k), et $(a_0, \ldots, a_{k-1}) \in k^k$, $R \in k[X]$ tels que
$$P(X) = (a_0 + a_1 X + \ldots + a_{k-1} X^{k-1}) Q + X^k R(X)$$
Alors la partie polaire de 0 est
$$F_0(X) = \frac{a_0}{X^k} + \frac{a_1}{X^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{X}$$

<u>Remarque 34</u> : Une fraction rationnelle $\frac{A(X)}{(X-a)^k B(X)}$ sous forme irréductible peut être ramené au cas du théorème 33 en posant
- $P(Y) = A(Y+a)$
- $Q(Y) = B(Y+a)$

<u>Remarques 35</u> : Ces méthodes sont particulièrement utiles lorsque $k = \mathbb{C}$, ou plus généralement k algébriquement clos.

<u>Remarque 36</u> : On peut passer du cas $k = \mathbb{C}$ à $k = \mathbb{R}$ en constatant que pour deux pôles non réels conjugués, les coefficients des parties polaires sont imaginaires et conjuguées.

III - Fractions rationnelles et séries formelles

<u>Théorème 37</u> : $F \in k(X)$ est développable en série formelle si et seulement si 0 n'est pas pôle de F dans K.

<u>Exemple 38</u> :
$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{1-X} = \sum_{n \geq 0} X^n \\ \frac{1}{(1-X)^p} = \sum_{n \geq 0} C_{n+p-1}^{p-1} X^n \end{array}\right\} \text{ si car } k = 0$$

<u>Théorème 39</u> : Soit $F \in k[[X]] \setminus k[X]$. $F = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$. Alors F est une fraction rationnelle si et seulement si il existe $N \geq 0$ et $m > 0$, et des éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in k$ tels que $\lambda_m \neq 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n+m \geq N \Rightarrow a_{n+m} = \sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i a_{n+m-i}$$

DVP

IV - Intégration de fractions rationnelles

<u>Théorème 40</u> : Pour que $F \in \mathbb{C}(X)$ admette une primitive rationnelle, il faut et il suffit que tous ses résidus soient nuls.

<u>Proposition 41</u> : Si $a \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{X-a}$ admet pour primitive
$$x \longmapsto a \operatorname{Log}|x-a|$$

<u>Proposition 42</u> : Si $F \in \mathbb{R}(X)$, a est un pôle non réel
$$\Phi(X) = \frac{A}{X-a} + \frac{\bar{A}}{X-\bar{a}} \quad (\text{cf remarque 36})$$
$$= \frac{2\alpha X + \beta}{X^2 - 2pX + q} = \alpha \frac{(X^2-2pX+q)'}{X^2-2pX+q} + \frac{\gamma}{X^2-2pX+q}$$
et $\frac{1}{\sqrt{q-p^2}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{X-p}{\sqrt{q-p^2}}\right)$ est primitive de $\frac{1}{X^2-2pX+q}$

I Commentaires & Questions plan

- Étude théorique de la DSE : on peut enlever ts les lemmes avt le thm 28 → laisse + de place pour les appli
- A quoi sert le thm 39 ?
  ↳ dénombrements, relaᵒ de rec, série gén, fracᵒ rat, expression des coeff av décomp. elts simples (cf exos, ref Francinou, gourdon)
- Thm de Müntz → se démontre av un calcul de dét. (det de Cauchy) qui se fait bien av les fracᵒ rat (cf Gourdon Alg & Anal).
- De la décomp en élt simple de $\frac{P'}{P}$ on peut déduire plein de résultats (eg. Gauss-Lucas (r de la deriv ds l'enveloppe cvxe), Jensen, Walsh, ...)
- Paramétrisaᵒ des coniques par des fracᵒ rationnelles (cf. P. Soulard, géom projective).
- Thm de zéro de Hilbert (Nullstensatz). (cf Goblot).
  (utilise l'indénombrabilité des $1/(X-a)$)
- Interpréter le thm 28 en terme de base ds un certain ev.
  ↳ $K_-(X) = \bigoplus \mathcal{J}_P$ où $\mathcal{J}_P = \{ \frac{A}{P^i} \mid i \in \mathbb{N},\ \deg A < P \}$
  La DSE ça dit que $K(X)$ est un K-ev de base $(1, X, \dots X^n) + \{ \frac{X^j}{P^i},\ i \in \mathbb{N},\ P\text{irr},\ j < \deg P \}$.

  ? Ainsi $K(X)$ admet une base a priori indén. Est-ce que ça veut dire qu'il n'admet pas de base dén ?

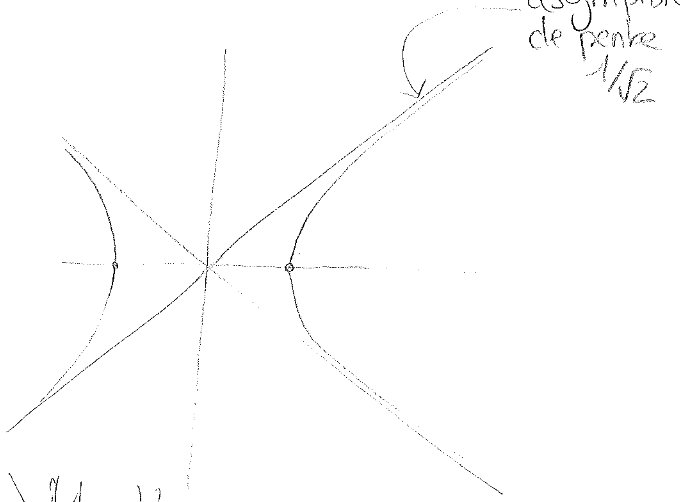
II Exercices

1 $\mathcal{C} = \{X^2 - 2Y^2 = 1\}$. On cherche $\begin{cases} K \to \mathcal{C} \setminus \{(1,0)\} \text{ bij.} \\ t \mapsto (X(t), Y(t)) \end{cases}$

Dessin : Si $|x| < 1$ → pas de sol.

Si $|x| \geq 1$: $x^2 = 1 + 2y^2$

$y^2 = \dfrac{x^2-1}{2}$



Résolu° : $\;= K \cup \{\infty\} \setminus \{+\infty\}$ $\quad y = \pm\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2}}$

$\varphi : \begin{cases} \mathbb{P}_1(K) \setminus \{\text{la dte verticale}\} \to \mathcal{C} \setminus \{(1,0)\} \\ D \mapsto \cap \text{ de } (1,0)+D \text{ av } \mathcal{C} \setminus \{(1,0)\} \end{cases}$

$\varphi : \begin{cases} K \to \mathcal{C} \setminus \{(1,0)\} \\ t \mapsto \{(x,y),\ y = t(x-1)\} \cap x^2 - 2y^2 = 1 \} \end{cases}$ → équa° de $(1,0)+D$

$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ y = t(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2t^2(x-1)^2 = 1 \\ y = t(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left[(x+1) - 2t(x-1)\right] = 0 \\ y = t(x-1) \end{cases}$

$x(1-2t^2) = -(1+2t^2)$

$\begin{cases} x = \dfrac{1+2t^2}{2t^2-1} \\ y = \dfrac{2t}{2t^2-1} \end{cases}$

Rq : On appelle ces courbes qui peuvent être paramétrisées par un seul param. "courbes unicursales".

2 (DSE). Décomp en élts simples dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ de $F = \dfrac{1}{X(\underbrace{X^2+1}_{(X-i)(X+i)})^2}$

• Dans $\mathbb{C}$: $\exists\, \alpha_0, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1$ tq $F = \dfrac{\alpha_0}{X} + \dfrac{\beta_0}{(X-i)} + \dfrac{\beta_1}{(X-i)^2} + \dfrac{\gamma_0}{(X+i)} + \dfrac{\gamma_1}{(X+i)^2}$

* Mult + éval → $\alpha_0 = 1$, $\beta_1 = \dfrac{1}{i(2i)^2} = \dfrac{-i}{4(-1)} = \dfrac{i}{4}$

* Conjugaison → $\gamma_1 = \overline{\beta_1} = -i/4$

$*\ F(X) - \frac{c_1}{(X-i)^2} - \frac{c_1'}{(X+i)^2} = \frac{1 - X(X+i)^2\frac{i}{4} + X(X-i)^2\frac{i}{4}}{X(X-i)^2(X+i)^2} = \frac{1 + \frac{i}{4}X(-X^2-i^2-2iX + X^2+i^2-2iX)}{X(X-i)^2(X+i)^2}$ (3)

$$= \frac{1 - \frac{4}{4}i^2X}{X(X+1)^2} = \frac{1+X}{X(X+1)^2} = \frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X(X-i)(X+i)}$$

Mult + eval $\to c_0 = \frac{1}{i(i+i)} = \frac{1}{i\times 2i} = -\frac{1}{2}$

Conjugaison $\to \gamma_0 = \overline{c_0} = -\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{X+i+X-i}{X^2+1} \qquad \frac{X^2+i^2+2iX - X^2-i^2+2iX}{(X^2+1)^2}$

• Dans $\mathbb{R}$: $F(X) = \frac{1}{X} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(X-i)} + \frac{1}{(X+i)}\right) + \frac{i}{4}\left(\frac{1}{(X-i)^2} - \frac{1}{(X+i)^2}\right)$

$$= \frac{1}{X} - \frac{1}{2}\frac{2X}{X^2+1} + \frac{4iX}{4}\frac{1}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{(X^2+1)^2}$$

$\boxed{3}$ (DSE). $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ 2 à 2 distincts

Décomp en élts simples $\frac{\prod_1^{n-1}(b_i - X)}{\prod_1^n (X+a_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X+a_i}$

En déduire $\det\left(\frac{1}{a_j+b_j}\right)_{i,j}$ (déterminant de Cauchy)

$\lambda_i = \frac{P(-a_i)}{Q'(-a_i)} = \frac{\prod_{1}^{n-1}(b_i+a_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(a_j-a_i)} \qquad \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{1}{b_j+a_i} = 0$ pour $j \in [\![1,n-1]\!]$

$L_n \leftarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$. pour calculer le det.

$\boxed{4}$ (Dénombrement). $S_n = \#\{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3, x+2y+3z = n\}$?

Mq $S_n = \frac{(n+1)(n+5)}{12} + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2}{9}\cos(2\pi n/3)$

$F_1 = \sum_{n\geq 0} x^n \quad F_2 = \sum_{n\geq 0} x^{2n} \quad F_3 = \sum_{n \geq 0} x^{3n} \quad F_1F_2F_3 = \sum_{m\geq 0}\Big(\underbrace{\quad}_{\#\{(n_1,n_2,n_3)|\dots\} = S_m}\Big)x^m = \sum_{m\geq 0} S_m x^m$

$F_1 = \frac{1}{1-X} \quad F_2 = \frac{1}{1-X^2} \quad F_3 = \frac{1}{1-X^3} \quad F_1F_2F_3 = \frac{\alpha_0}{X-1} + \frac{\alpha_1}{(X-1)^2} + \frac{\alpha_2}{(X-1)^3} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X-j} + \frac{\delta}{X-\bar{j}}$

Faire la décomp... Et après ?

$\boxed{5}$ $\mathbb{C} \subset L$. • $\exists \alpha \in L$ transcendant, L est de dim indén. $/\mathbb{C}$

• Réciproquement, si dim L est au + dén. alors $L = \mathbb{C}$

• $\left(\frac{1}{X-a}\right)_{a\in\mathbb{C}}$ libre & indén.

cf Nullstellensatz.