plan 1/3

NOM : Pellet-Mary Prénom : Alice Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse** 109

Sujet choisi :

Autre sujet : représentations de groupes finis de petit cardinal.

Dans toute la leçon, G est un groupe fini et V un $\mathbb{C}$-ev de dim finie.

I) Représentations de groupes finis

1) Définitions et exemples

<u>Def 1</u> : Une <u>représentation</u> (V,ρ) de G est la donnée d'un $\mathbb{C}$-ev V (ici de dim finie) et d'un morphisme $\rho : G \to GL(V)$.

On note $\rho(g)(v) = g\cdot v$ $\quad (g\in G,\ v\in V)$

<u>Exemple 2</u> : * $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, (V,ρ) est déterminée par la donnée de $\rho(1)$ tel que $\rho(1)^n = Id_V$.

* Pour tout morphisme $\varphi : G \to \mathbb{C}^*$, $(\mathbb{C},\varphi)$ est une représentation de G.

↳ <u>représentation triviale</u> : $(\mathbb{C}, \mathbb{1})$ avec $\mathbb{1}(g) = 1$ $\forall g\in G$

* <u>représentation régulière</u> : $V = Vect(e_g,\ g\in G)$ et $\forall g,h\in G$, $g\cdot e_h = e_{gh}$

* $G = \sigma_n$, $V = Vect(e_i,\ 1\leq i\leq n)$, $\sigma\cdot e_i = e_{\sigma(i)}$ $\quad \forall \sigma\in\sigma_n,\ 1\leq i\leq n$

* (V_1,ρ_1), (V_2,ρ_2) deux représentations de G.

$(Hom(V_1,V_2), \rho)$ avec $\rho(g)(\varphi) = \rho_2(g)\circ\varphi\circ\rho_1(g^{-1})$ est aussi une représentation de G.

<u>Def 3</u> : Une <u>sous-représentation</u> de V est un sous-ev W de V stable par G, ie tel que $\forall g\in G,\ \forall w\in W,\quad g\cdot w\in W$

<u>Def 4</u> : représentation <u>irréductible</u> (abrégé en rep. irr.) : (V,ρ) est irréductible si ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et V.

<u>Exemple 5</u> : * Toute rep. de dim 1 est irréductible

* (V_1,ρ_1) et (V_2,ρ_2) deux rep de G, alors $(V_1\oplus V_2, \rho_1\oplus\rho_2)$ n'est pas irréductible.

<u>Def 6</u> : Applications <u>G-linéaires</u>.

(V_1,ρ_1), (V_2,ρ_2) deux rep. de G. $\varphi\in Hom(V_1,V_2)$ est G-linéaire si

$\forall g\in G,\ \forall v\in V_1,\quad \varphi(g\cdot v) = g\cdot\varphi(v)$

<u>Exemple 6</u> : les homothéties $\lambda I_V : V\to V$ sont G-linéaires

<u>Définition 7</u> : Deux représentations (V_1,ρ_1) et (V_2,ρ_2) sont <u>isomorphes</u> s'il existe un isomorphisme G-linéaire de V_1 dans V_2.

2) Premiers résultats :

<u>Théorème 8</u> : (Maschke) Toute représentation de G de dimension finie se décompose en somme directe de rep. irréductibles.

<u>Lemme 9</u> : (Schur)

* Si (V_1,ρ_1) et (V_2,ρ_2) sont deux rep. irr de G et $\varphi : V_1\to V_2$ est G-linéaire, alors — soit φ est bijectif (et $V_1\cong V_2$), soit $\varphi\equiv 0$.

* Si $\varphi : V\to V$ est G-linéaire et V irr, alors φ est une homothétie.

<u>Application 10</u> : Si G est abélien, les rep. irr. de G sont de dimension 1.

Refs.
- Colmez, éléments d'analyse et d'algèbre (et...)
- J.P Serre, représentations linéaires de gpes finis
- M.P. Malliavin, ggg/ avec représenta° (dev 2)

plan 2/3

NOM : Pellet-Mary Prénom : Alice Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 109

Autre sujet :

<u>Corollaire 11</u> : On a unicité de la décomposition du théorème de Maschke (à isomorphisme près).

II) Caractère d'une représentation :

1) Théorème de Frobenius :

<u>Remarque 12</u> : $\forall g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable.

Motivation : si on connait $Tr(\rho(g))$, $Tr(\rho(g^2)) = Tr(\rho(g)^2)$ ... $Tr(\rho(g)^{|G|})$, on connait $\rho(g)$.

<u>Définition 13</u> : Le caractère de (V,ρ) est
$$\chi_V : \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathbb{C} \\ g \longmapsto Tr(\rho(g)) \end{array}$$

<u>Remarque 14</u> : si $\dim(V) > 1$, χ_V n'est pas un morphisme.

<u>Propriétés 15</u> :
- $\chi_V(1) = \dim(V)$
- $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ $\quad g, h \in G$
- $\chi_V(ghg^{-1}) = \chi_V(h)$

<u>Définition 16</u> : une fonction $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ est <u>centrale</u> si $\forall g,h \in G$, $f(ghg^{-1}) = f(h)$.

On note <u>$R_c(G)$</u> l'espace des fonctions centrales et <u>$Conj(G)$</u> l'ensemble des classes de conjugaison de G (les $\{ghg^{-1}, g \in G\}$ pour $h \in G$).

<u>Exemple 17</u> : (V,ρ) une représentation, alors $\chi_V \in R_c(G)$.

$R_c(G)$ est un $\mathbb{C}$-ev que l'on munit du produit scalaire $\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \psi(g)$ $\quad \forall \varphi, \psi \in R_c(G)$.

<u>Théorème 18 (Frobenius)</u> : Les caractères de représentations irréductibles forment une base orthonormée de $R_c(G)$.

<u>Corollaire 19</u> : Il y a autant de rep. irr. de G que de classes de conjugaison de G. En particulier, il y a un nombre fini de rep. irr.

On note $W_1, \dots, W_r$ les rep. irr. de G non isomorphes deux à deux.

<u>Corollaire 20</u> : si $V \cong W_1^{n_1} \oplus \dots \oplus W_r^{n_r}$, alors $n_i = \langle \chi_V, \chi_{W_i} \rangle$.

χ_V caractérise la représentation V.

<u>Corollaire 21</u> : si $\chi_V = \chi_W$, alors $V \cong W$

<u>Corollaire 22</u> : V est irréductible ssi $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$

<u>Proposition 23</u> : Soit R_G la rep. régulière de G.
$$R_G \cong W_1^{\dim(W_1)} \oplus \dots \oplus W_r^{\dim(W_r)}$$
(où les W_i sont les rep. irr. de G).

<u>Corollaire 24</u> : $|G| = \sum \dim(W_i)^2$

<u>Conclusion</u> : Si on connait tous les caractères irréductibles de G, on connait toutes ses représentations.

2) Table des caractères :

<u>Idée</u> : On veut connaître toutes les valeurs des caractères irréductibles de G.

<u>Définition 25</u> : La table des caractères de G est la table carrée $(\chi_W(C))_{\substack{W \in \{\text{rep. irr. de } G\} \\ C \in Conj(G)}}$

cf allure en annexe 1.

<u>Proposition 26</u> : orthogonalité des lignes/colonnes.

$\forall \chi_1 \neq \chi_2$ irr, $\sum_{C \in Conj(G)} |C| \times \overline{\chi_1(C)} \times \chi_2(C) = 0$

$\forall C_1 \neq C_2 \in Conj(G)$, $\sum_{\chi \text{ irr}} \overline{\chi(C_1)} \chi(C_2) = 0$

plan 3/3

NOM : Pellet-Mary Prénom : Alice Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 109

Autre sujet :

<u>Remarque 27</u> : utile pour remplir une table de caractère : corollaires 19, 24 et prop. 26.

Avec tout ce qui précède, on calcule les tables de caractère de

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (annexe 2)
- $\mathfrak{S}_4$ (annexe 3)
- A_5 (annexe 4)
- D_8 (groupe diédral à 8 éléments) (annexe 5)
- H_8 (ss-groupe des quaternions, formé de $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$) (annexe 6).

dvpt 1

<u>Remarque 28</u> : La table caractérise les représentations mais pas le groupe : D_8 et H_8 ont la même table mais ne sont pas isomorphes.

III) Application des représentations :

1) Simplicité :

<u>Définition 29</u> : G est dit simple si ses seuls sous-groupes distingués sont G et $\{1\}$.

dvpt 2

<u>Proposition 30</u> : G est simple ssi pour tout caractère irréductible non trivial χ et pour tout $g \in G$, $g \neq 1$, on a $\chi(g) \neq \chi(1)$.

<u>Exemple 31</u> : Dans toutes les tables de caractère données en annexe, A_5 et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec n premier sont les seuls groupes simples.

2) Transformée de Fourier discrète :

Dans cette partie, G est abélien.

$R_{\mathbb{C}}(G)$ est alors l'ensemble des fonctions de $G \to \mathbb{C}$, et les caractères irréductibles sont de dimension 1, donc ce sont les morphismes $G \to \mathbb{C}^*$ (noté $\widehat{G}$).

<u>Remarque 32</u> : Si G est abélien, $|\widehat{G}| = |G|$ (corollaire du th. de Frobenius).

<u>Définition 33</u> : La transformée de Fourier d'une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ est

$$\hat{f} : \begin{array}{l} \widehat{G} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \chi \longmapsto \langle \chi, f \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{\chi(g)} \end{array}$$

<u>Proposition 34</u> : inversion de Fourier

si $f : G \to \mathbb{C}$, alors

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle \chi, f \rangle \cdot \chi = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \hat{f}(\chi) \chi$$

(conséquence directe du fait que $\widehat{G}$ forme une base orthonormale de $R_{\mathbb{C}}(G)$).

<u>Exemple 35</u> :

$G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\widehat{G} = \{\varphi_k : 1 \mapsto e^{\frac{2i\pi k}{n}}, 0 \leq k < n\}$

$$\hat{f}(\varphi_k) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f(l) e^{-\frac{2i\pi kl}{n}}$$

et $f = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(\varphi_k) \varphi_k$

<u>Application 36</u> : algorithme de multiplication de grands entiers en temps quasi-linéaire.

Annexe 1 : Allure d'une table de caractère.

	1	n_2		n_r ← cardinal de C_r
G	1	C_2	$\dots$	C_r ← classes de conj de G
χ_1	$\chi_1(1)$	$\chi_1(C_2)$	$\dots$	$\chi_1(C_r)$
χ_2	$\chi_2(1)$	$\chi_2(C_2)$	$\dots$	$\chi_2(C_r)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_r	$\chi_r(1)$	$\chi_r(C_2)$	$\dots$	$\chi_r(C_r)$

caractères irr. de G

dimension de la représentation

Annexe 2 : Table des caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On pose $\zeta = e^{2i\pi/n}$

	1	1	1		1
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	0	1	2	$\dots$	$n-1$
χ_1	1	1	1	$\dots$	1
χ_2	1	ζ	ζ^2	$\dots$	ζ^{n-1}
χ_3	1	ζ^2	ζ^4	$\dots$	ζ^{2n-2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_n	1	ζ^{n-1}	ζ^{-2}	$\dots$	ζ

Annexe 3 : Table de caractère de σ_4

	1	6	8	6	3
σ_4	1	(ab)	(abc)	$(abcd)$	$(ab)(cd)$
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1	0	2
$\varepsilon \times \chi_{std}$	3	-1	0	1	-1
χ_{std}	3	1	0	-1	-1

Annexe 4 : Table de caractère de A_5

	1	20	15	12	12
A_5	1	(abc)	$(ab)(cd)$	(12345)	(12354)
1	1	1	1	1	1
χ_3	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_3'	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_{std}	4	1	0	-1	-1
χ_5	5	-1	-1	0	0

Annexe 5 : Table de caractère de D_8

On note r une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et s une symétrie

	1	1	2	2	2
D_8	$\{1\}$	$\{r^2\}$	$\{r, r^3\}$	$\{sr, sr^3\}$	$\{s, sr^2\}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	1	-1	-1
χ_5	2	-2	0	0	0

Annexe 6 : Table de caractère de H_8

$H_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ t.q. $ijk = -1$

	1	1	2	2	2
H_8	1	$\{-1\}$	$\{\pm i\}$	$\{\pm j\}$	$\{\pm k\}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	1	-1	-1
χ_5	2	-2	0	0	0

Développement 1

Calculer la table de caractère de σ_4 (groupe des permutations de 4 éléments).

1e étape : calculer les classes de conjugaison de σ_4.

Proposition : Deux cycles de même longueur sont conjugués sur σ

Preuve : Soient $(a_1 \cdots a_r)$ et $(b_1 \cdots b_r)$ deux cycles de σ_n.

Si $\sigma \in \sigma_n$ est tel que $\sigma(a_i) = b_i \ \forall i \in \{1, \dots, r\}$

Alors $(a_1 \cdots a_r) = \sigma^{-1} (b_1 \cdots b_r) \sigma$

Conclusion : les classes de conjugaison de σ_4 sont $\overline{id}$, $\overline{(12)}$, $\overline{(123)}$, $\overline{(1234)}$, $\overline{(12)(34)}$ ($\bar{\sigma}$ représente la classe de σ).

2e étape :

On commence la table

σ_4	1 $\overline{id}$	6 $\overline{(12)}$	8 $\overline{(123)}$	6 $\overline{(1234)}$	3 $\overline{(12)(34)}$
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1	0	2
$\varepsilon \times \chi_{std}$	3	-1	0	1	-1
χ_{std}	3	1	0	-1	-1

- représentation triviale : $(\mathbb{C}, \rho)$ avec $\rho(g) = 1 \ \forall g \in G$ est une représentation irréductible pour tout groupe G
- morphismes de $\sigma_4 \to \mathbb{C}$: $id : \sigma \mapsto 1$ (on l'a déjà)

  ou $\varepsilon : \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$ signature

ce sont les seuls morphismes possibles de σ_4 dans $\mathbb{C}$.

Représentation standard : valable pour tout groupe σ_n.

On considère la représentation (V,ρ) avec V de dim n
base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$

et $\rho(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$ $\forall \sigma \in \sigma_n$, $i \in \{1,\dots,n\}$

V se décompose en 2 sous espaces $V = V_1 \oplus V_2$

avec $V_1 = \mathrm{Vect}(e_1+e_2+\dots+e_n)$ et $V_2 = \{\sum x_i e_i \text{ t.q. } \sum x_i = 0\} = V_1^\perp$

V_1 et V_2 sont stables par G,

donc sont des sous-représentations de V.

V_1 est de dimension 1 donc irréductible.

Montrons que V_2 est irréductible en calculant

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \underbrace{\langle \chi_{V_1}, \chi_{V_1} \rangle}_{=1} + \underbrace{\langle \chi_{V_1}, \chi_{V_2} \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\langle \chi_{V_2}, \chi_{V_1} \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\langle \chi_{V_2}, \chi_{V_2} \rangle}_{\geq 1}$$

On aura V_2 irréductible ssi $\langle \chi_{V_2}, \chi_{V_2} \rangle = 1$ et $\langle \chi_{V_1}, \chi_{V_2} \rangle = 0$

ie ssi $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 2$.

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{1}{|\sigma_n|} \sum_{\sigma \in \sigma_n} |\mathrm{Tr}(\rho(\sigma))|^2$$

$\rho(\sigma)$ agit en permutant les éléments de la base selon σ, donc $\mathrm{Tr}(\rho(\sigma)) = \#\{\text{points fixes de } \sigma\}$

D'où
$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \sigma_n} \#\{\text{points fixes de } \sigma\}^2$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \sigma_n} \#\{\text{points fixes de } \sigma \text{ sur } [\![1,\dots,n]\!]^2\}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \#\{\sigma \text{ t.q. } \sigma(i)=i \text{ et } \sigma(j)=j\}$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\sum_{i \in [\![1,n]\!]} \#\{\sigma \text{ t.q. } \sigma(i)=i\} + \sum_{i \neq j} \#\{\sigma \text{ t.q. } \sigma(i)=i,\ \sigma(j)=j\} \right)$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\sum_i (n-1)! + \sum_{i \neq j} (n-2)! \right)$$

$$= \frac{1}{n!} \left(n \times (n-1)! + n(n-1) \times (n-2)! \right)$$

$$= 2$$

Donc V_2 est irréductible, de dimension $n-1$.

Et $\chi_{V_2} = \chi_V - \chi_{V_1}$ (V_1 est la représentation triviale)

D'où $\chi_{V_2}(\sigma) = \#\{\text{pts fixes de } \sigma\} - 1$

$\Rightarrow$ on remplit la dernière ligne de la table.

$(V_2, \rho_{|V_2})$ est appelée représentation standard de $\mathfrak{S}_n$.

Une autre représentation de dim 3 : Si (V, ρ) est une représentati[on] irréductible et $\varphi : G \to \mathbb{C}$ un morphisme de groupe, alors $(V, \varphi \times \rho)$ est aussi irréductible.

En effet, $g \longmapsto \varphi(g) \times \rho(g)$ est un morphisme $G \longrightarrow GL(V)$

Et si W est un sev de V tel que $\forall g \in G$, $\varphi(g) \times \rho(g)(W) \subset W$

alors $\rho(g)(W) \subset W$

Donc $W = V$ ou $W = \{0\}$ car V est irréductible pour ρ.

$\hookrightarrow$ $\varepsilon \times \chi_{std}$ nous donne une autre représentation irréductible de dimension 3.

On complète la dernière ligne avec $|\mathfrak{S}_4| = \sum_{V \text{ irr}} \dim(V)^2$

i.e. $24 = 1 + 1 + x^2 + 9 + 9$

$\hookrightarrow x = 2$

puis orthogonalité des colonnes.

Développement 2

Proposition : G (de card n.) est simple si et seulement si pour tout caractère irréductible χ et pour tout $g \in G \setminus \{e\}$, on a

$\chi(g) \neq \chi(e)$.

Lemme 1 : Si H est un sous-groupe distingué de G, alors il existe $(V_1, \rho_1), \dots, (V_r, \rho_r)$ des représentations irréductibles de G telles que $H = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(\rho_i)$.

Lemme 2 : Si (V, ρ) est une représentation de G, alors $\operatorname{Ker}(\rho)$ est un sous-groupe distingué de G.

Des lemme 1 et 2, on déduit le corollaire :
Les sous-groupes distingués de G sont exactement les intersections $\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}(\rho_i)$ pour $\{(\rho_i, V_i)_{1 \le i \le s}\}$ un sous-ensemble des représentations irréductibles de G.

Donc G est simple ssi $\forall (V, \rho)$ représentation irréductible, $\operatorname{Ker}(\rho) = G$ ou $\operatorname{Ker}(\rho) = \{e\}$

ssi $\forall (V, \rho)$ rep. irr. non triviale, $\operatorname{Ker}(\rho) = \{e\}$.

Comment lire $\operatorname{Ker}(\rho)$ dans la table des caractères ?

Lemme 3 : (V, ρ) une rep de G. Alors $\operatorname{Ker}(\rho) = \{g \in G \text{ t.q. } \chi_V(g) = \dim(V)\}$
$= \{g \in G \text{ t.q. } \chi_V(g) = \chi_V(e)\}$

En effet, si $\rho(g) = id_V$, alors $\chi_V(g) = \dim(V) = \chi_V(e)$.
Réciproquement, on sait que $\rho(g^n) = id$ donc $\rho(g)$ est annulé par $X^n - 1$, donc $\rho(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont des racines de l'unité.
Mais $\chi_V(g) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$ donc si $\chi_V(g) = \dim(V) = \sum_{i=1}^{r} 1$, on a nécessairement $\lambda_i = 1$ $\forall i$ et $\rho(g) = id_V$ donc $g \in \operatorname{Ker}(\rho)$.

Pour conclure, G est simple ssi $\forall (V,\rho)$ rep. irr. non triviale, $\{g \in G \text{ t.q. } \chi_V(g) = \chi_V(e)\} = \{e\}$

d'où la proposition.

Preuve du Lemme 1: $H \triangleleft G$ — ρ représenta. régulière de G/H

Soit V un $\mathbb{C}$-ev de dimension $|G/H|$, muni d'une base indexée par G/H : $\mathcal{B} = \{e_{gH},\ gH \in G/H\}$

On fait agir G sur V par ρ tel que $\rho(g_1)(e_{g_2 H}) = e_{g_1 g_2 H}$

Par définition, $\rho(g_1)$ est bien une application linéaire,

et $\forall g_1, g_2 \in G,\ gH \in G/H$, on a $\rho(g_1 g_2)(e_{gH}) = e_{g_1 g_2 g H} = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)(e_{gH})$

Donc (V,ρ) est bien une représentation de G.

De plus, $g_1 \in Ker(\rho) \iff \forall gH \in G/H,\ g_1 gH = gH$

$\iff \forall g \in G,\ g^{-1} g_1 g H = H$

$\iff g_1 \in H$

Donc $Ker(\rho) = H$.

Et si on décompose (V,ρ) en représentations irréductibles :

$$V = W_1^{n_1} \oplus \dots \oplus W_r^{n_r}$$

On a que $Ker(\rho_V) = \bigcap_{i=1}^{r} Ker(\rho_{W_i})$

Donc $H = \bigcap_{i=1}^{r} Ker(\rho_{W_i})$ d'où le Lemme 1.

Preuve du Lemme 2:

$H = Ker(\rho)$ est un sous-groupe distingué de G car c'est le noyau d'un morphisme $(\rho : G \to GL(V))$.

Application: * A_5 est un groupe simple

* $\mathfrak{S}_4$ n'est pas simple. Et on peut même énumérer ses sous-groupes distingués : $\mathfrak{S}_4$, $\underbrace{\{id, (abc), (ab)(cd)\}}_{= A_4}$, $\{id, (ab)(cd)\}$ et $\{id\}$

(et leurs intersections mais ici ça ne rajoute pas de nouveau sous-groupe).

* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est simple ssi $\forall i,j$ t.q. $\begin{matrix} 1\leq i\leq n-1 \\ 1\leq j\leq n-1 \end{matrix}$, $\rho^{ij} \neq 1$

ssi n est premier

* Les sous-groupes distingués de H_8 sont $\{\pm 1, \pm i\}$, $\{\pm 1, \pm j\}$, $\{\pm 1, \pm k\}$, $\{\pm 1\}$,

et H_8, $\{1\}$ intersection de 2 précédents

Leçon 103 : Représentations de groupes finis de petit cardinal

I. Remarques

- Tableau ?
- pquoi H_8 et D_8 pas isomorph (mais ont la même table de χ) ?
  → regarder le nbre d'éléments d'ordre 4
- énoncer directement on va lire les s-groupes distingués à partir de la table de χ (dev 2)

II. Questions

- appli 1 : Détailler
  ↳ G abélien (V, ρ) irréductible $\rho(g) : V \to V$ est G-linéaire
  $(\Leftarrow \rho(g)(\rho(h)(v)) = \rho(gh)(v) = \rho(hg)(v) = \rho(h)(\rho(g)(v)).)$
  Donc $\rho(g) = \lambda_g \, Id$
  Et sans parler du Lemme de Schur, ni même des χ ? Si on a une que de matrices qui commutent, que peut-on dire des esp propres ?
  Plus précisément : 2 endomorph diag qui commutent, mq ils diagonalisent ds une même base
  → Mq que les espaces propres de l'un sont stables par l'autre puis l'écrire ds cette base
  Réciproque ?
  ↳ oui
- corollaire 10 : Comment on détermine χ_V dans ce cas-là ?
  → $\chi_V = n_1 \chi_{W_1} + \dots + n_r \chi_{W_r}$
  (à mettre ds le plan)
- Annexe 3 (table de $\mathfrak{S}_4$) V = repr de χ_{std}. $V \otimes V$ irred ?

à mettre ds le plan !!

→ $\chi_{V\otimes V} = \chi_V \times \chi_V$ $\langle \chi_{mon}, \chi_{mon} \rangle = \frac{1}{n} \sum$ → mon !

La décomposer en repr irr

→ $\langle \chi_{mon}, \chi_1 \rangle = 1/4! \sum_{\sigma \in S_4} \chi_{mon}(\sigma)\chi_1 = \ldots$

$\langle \chi_{mon}, 1 \rangle = 1$

$\langle \chi_{mon}, \varepsilon \rangle = 9-6-6+3 = 0$

$\langle \chi_{mon}, \chi_2 \rangle = 18/24 + 6 = 1$

$\langle \chi_{mon}, \chi_{std} \rangle = 1/24(27+6-6-3) = 1$

$\langle \chi_{mon}, \chi_{std\,\varepsilon} \rangle = 1$

cf de la table de χ

→ trop vague

- applica° 36 Dipper (transformé de Fourier → mult de pol entiers en tps quasi linéaire)

Rapport av les gpes de ptts card ?

→ plus tellement "on peut voir ptt comme pas compliqué"

III Exercices

- Est-ce qu'une représenta° de dim ∞ peut être irréductible ? (ds gpe fini)

→ non. Ds plus forcément unicité de la décomp

- (V, ρ) représenta°

Représenta° duale ? (de G). Et son caract ?

→ (V^*, ρ^*) ($V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$) $\forall \varphi \in V^*$, $g \cdot \varphi = \varphi \circ \rho(g^{-1})$

$\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$

Qd est-ce que V et V^* isomorph (en tant que repr) ?

→ ssi $\chi_V = \chi_{V^*}$ ssi $\chi_V(g) \in \mathbb{R}$ $\forall g$

- G fini H abélien. Dim max de V irréd ?

→ $\leq (G:H)$

Rq. Si H est le centre alors la dim divise $(G:H)$

Applica° : dim max d'une repr irréd d'un gpe diédral D_n ?

↳ S_2

G_S atteint ?

→ Oui car si que des repr de dim 1 alors abélien et D_n pas abélien

- Classifier G ptt résoluble G invariants ⇒ une repr irréd

IV Commentaires

- Ex des ptt résoluble G invariant ⇒ gros outil

↳ pour montrer Burnside

- Manque lien entre théorie et exples
- Manque les opéra° standard sur repr et χ
- Parler du lien avec géométrie
- Transformée de Fourier = pas indispensable