16 Décomposition polaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Théorème. *L'application* $\mu: \begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++} & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \longmapsto & OS \end{array}$ *est un homéomorphisme.*

Lemme. *Le groupe* $O_n(\mathbb{R})$ *est compact.*

Démonstration. Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMM \end{array}$, f est continue (car polynomial en les coefficients de M) et $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$ donc $O_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $O_n(\mathbb{R})$ est borné car les matrices orthogonales sont de norme 1 pour la norme subordonnée à $||\cdot||_2$. C'est donc un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie donc un compact. $\square$

Démonstration du théorème.
ETAPE 1 : L'application μ est bien définie car si $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ on a $O, S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donc $OS \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ($O_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sous groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$). Elle est de plus continue car polynomiale en les coefficients de O et M.
ETAPE 2 : Montrons que μ est surjective. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(R)$, on a ${}^tMM \in S_n^{++}$ car pour tout $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, ${}^tx{}^tMMx = {}^t(Mx)Mx = ||Mx||_2^2$. On peut donc diagonaliser (par le thm spectral) ${}^tMM$ dans une base orthonormée, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ tels que :

$$ {}^tMM = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}. \text{ On pose alors } S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}, $$

$S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car P est orthogonale et ses valeurs propres sont strictement positives.
On cherche O tel que $M = OS$, posons $O = MS^{-1}$, il vient alors : ${}^tOO = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = {}^tS^{-1}{}^tMMS^{-1}$ or par construction $S^2 = {}^tMM$ donc ${}^tOO = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$, donc $O \in O_n(\mathbb{R})$. On a bien $M = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
ETAPE 3 : Montrons que μ est injective. Supposons que $M = OS = O'S'$ avec $O, O' \in O_n(\mathbb{R})$ et $S, S' \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $S^2 = {}^tMM = {}^t(O'S')O'S' = {}^tS'{}^tO'O'S' = S'^2$. Montrons que S et S' commutent : soit Q un polynôme tel que pour tout i, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ (par exemple interpolateur de Lagrange). Alors,

$$ S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = PQ \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \right) P^{-1} = Q \left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \right) $$
$$ = Q(S^2) = Q(S'^2). $$

Or S' commute avec $Q(S'^2)$ qui est un polynôme en S', donc avec S. Ces deux matrices, étant symétriques définies positives, sont alors diagonalisables dans une même base.

Il existe $P_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$S = P_0 \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} P_0^{-1} \text{ et } S' = P_0 \begin{pmatrix} \mu'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu'_n \end{pmatrix} P_0^{-1},$$

or $S^2 = S'^2$ donc pour tout $i \in [|1,n|]$, $\mu_i^2 = \mu_i'^2 \Rightarrow \mu_i = \mu'_i$ car $\forall i \in [|1,n|]$, $\mu_i, \mu'_i > 0$ (car $S, S' \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$). Finalement $S = S'$ et donc $O = O'$, μ est bien injective.

ETAPE 4 : On va montrer que $\mu^{-1} : M \mapsto (O,S)$ est continue de façon séquentielle. Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ un suite de matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $M = OS$, soit pour tout p $(O_p, S_p) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $M_p = O_pS_p$. Il faut donc montrer que (O_p, S_p) converge vers (O, S). On montre que O_p converge vers O : on sait par le lemme que $O_n(R)$ est compact, il existe donc $(O_{p_k})_k$ une sous-suite de $(O_p)_p$ convergeant vers $\overline{O} \in O_n(\mathbb{R})$ une valeur d'adhérence. Alors $S_{p_k} = {O_{p_k}}^{-1} M_{p_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \overline{O}^{-1} M := \overline{S}$. Or $\overline{S} = \overline{O}^{-1}M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\overline{S}$. On a $M = \overline{OS}$ et par unicité de la décomposition $\overline{O} = O$ et $\overline{S} = S$. $(O_p)_p$ possède donc une unique valeurs d'adhérence (O) dans un compact donc converge vers O. La convergence de (O_p) vers O implique la convergence de (S_p) vers S car $S_p = {O_p}^{-1} M_p \xrightarrow[p\to\infty]{} O^{-1}M = S$. □

Lemme. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

Démonstration. $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en effet si $(M_n)_n$ est une suite de matrices de $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ convergeant vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout n, ${}^tM_n = M_n$ et pour tout $x \neq 0$, ${}^txM_nx \geq 0$, ces propriétés passent à la limite donc ${}^tM = M$ et $\forall \neq 0$, ${}^txMx \geq 0$ donc $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ qui est donc fermé. On obtient ainsi $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})} \subseteq \overline{\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})} = \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Pour montrer l'inclusion réciproque il suffit de prendre une matrice $S \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ et montrer qu'elle est limite d'une suite d'éléments de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: S est symétrique positive donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(R)$ tel que $S = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$ et $\forall i \in [|1,n|]$, $\lambda_i \geq 0$. On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = P \operatorname{diag}(\lambda_1 + \frac{1}{k}, \dots, \lambda_n + \frac{1}{k})P^{-1}$, alors il est clair que $(S_k)_k$ converge vers S en étant dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. □

Remarque. ⚠ classique, ne pas abuser du recasage compulsif.

— Attention aux prérequis. Si les lemmes ne sont pas montré durant le développement c'est des questions automatiques du jury. Bien que le raisonnement est "facile" à comprendre, je trouve que les outils utilisés ne sont pas triviaux (thm spectral, compacité, adhérence...).

— La fin de la démonstration (Etape 4) est vite faite dans le livre.

Questions.

1. *Montrer qu'une suite avec un unique valeur d'adhérence dans un compact converge.*
2. *Montrer que pour* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||M|||_2 = \sqrt{\rho({}^tMM)}$ *(le faire pour* $A \in \mathrm{GL}_n(R)$ *avant).*

Références. CALDERO et GERMONI, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries : Tome premier* page 202 pour la démo, page 39 pour la compacité de $O_n(\mathbb{R})$.