17 Théorème central limite

Théorème (central limite). *Soit $(X_i)_i$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d admettant un moment d'ordre 2. On note m leur espérance et $\sigma^2 > 0$ leur variance. Alors,*

$$\frac{(X_1 + \cdots + X_n) - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(S_n - m) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

Lemme. *Soit $(z_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^n$ telle que $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ alors $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = e^z$.*

Démonstration. Supposons que z_n est une suite réelle de limite $z \in \mathbb{R}$, alors $z_n = z + o(1)$ et par un développement limité du logarithme on obtient :

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{z_n}{n})} = e^{n\ln\left(1+\frac{z}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n\left(\frac{z}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{z+o(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^z.$$

Revenons maintenant au cas complexe, pour tout entier n,

$$\left|e^{z_n} - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_n^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k}\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)z_n^k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{z_n^k}{k!}\right|.$$

Or pour tout $0 \leq k \leq n$, $\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}\right) \geq 0$ car $\frac{n!}{(n-k)!n^k} \leq 1$. Alors par inégalité triangulaire, réarrangement des sommes et par le résultat montré sur les suites réelles on trouve :

$$\begin{aligned}\left|e^{z_n} - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right| &\leq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)|z_n^k| + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left|z_n^k\right|}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\left|z_n^k\right|}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\left|z_n^k\right|}{n^k}\\ &= e^{|z_n|} - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{|z|} - e^{|z|} = 0.\end{aligned}$$

□

Lemme. *La fonction caractéristique d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ est $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.*

Démonstration. Par définition $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$. On peut dériver sous l'intégrale, en effet la fonction $t \mapsto e^{itx}e^{-x^2/2}$ est continue, dérivable de dérivée $t \mapsto ixe^{itx}e^{-x^2/2}$ et $|ixe^{itx}e^{-x^2/2}| = |x|e^{-x^2/2}$ est intégrable, d'intégrale égale à 1. On a alors :

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} ixe^{itx}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}(-xe^{-x^2/2})\,\mathrm{d}x.$$

Une intégration par partie (licite car le terme entre crochets est nul) donne :

$$\varphi'(t) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}(-xe^{-x^2/2})\,\mathrm{d}x = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{itx}e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i^2t}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = -t\varphi(t).$$

Alors φ est solution du problème de Cauchy $y(t) = -ty(t)$ avec $y(0) = 1$ donc $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$. □

Démonstration du théorème central limite.
Montrons le théorème lorsque $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$. Il s'agit donc de montrer que $T_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$. On commence par calculer φ_n la fonction caractéristique de T_n, on note φ la fonction caractéristique de X_1. Par indépendance et équidistribution des variables X_i on obtient pour tout t dans $\mathbb{R}$:

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E}\left(e^{it\frac{(X_1+\cdots+X_n)}{\sqrt{n}}}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{itX_1}{\sqrt{n}}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{\frac{itX_1}{\sqrt{n}}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Par hypothèse la variable X_1 admet un moment d'ordre 2, donc par le théorème de régularité φ la fonction caractéristique de X_1 est de classe $\mathcal{C}^2$ et on a $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = i\mathbb{E}(X) = 0$ et $\varphi''(0) = i^2\mathbb{E}(X_1^2) = -1$. Ainsi par un développement limité à l'ordre 2 en 0, pour tout t,

$$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \text{ et donc } \varphi_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n.$$

On a $\frac{t^2}{2} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{t^2}{2}$ donc par le lemme $\varphi_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{t^2/2}$. La fonction φ_n converge donc simplement vers $t \mapsto e^{t^2/2}$ qui est la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, le théorème de Lévy permet alors de conclure.

Plaçons nous maintenant dans le cas général de variables X_i d'espérance m et de variance σ^2. On pose pour tout i, $X_i' = \frac{X_i - m}{\sigma}$ (et donc $X_i = \sigma X_i' + m$), alors les variables X_i' sont indépendantes, de même loi, d'espérance nulle et de variance égale à 1. Alors,

$$\frac{(X_1 + \cdots + X_n) - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{((\sigma X_1' + m) + \cdots + (\sigma X_n' + m)) - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{X_1' + \cdots + X_n'}{\sqrt{n}},$$

ce qui converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$. □

Remarque. On a ici utilisé deux prérequis en plus des lemmes calculatoires : le théorème de régularité de la fonction caractéristique (si X v.a. admettant un moment d'ordre n, φ^X est $\mathcal{C}^k$ et $(\varphi^X)^{(k)}(t) = i^k\mathbb{E}\big(X^k e^{itX}\big)$), et surtout le théorème (digne d'un bon développement) de Lévy ($X_n \xrightarrow{loi} X \iff \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi^{X_n}(t) \longrightarrow \varphi^X(t)$).

Références.

APPEL, *Probabilités pour les non-probabilistes* thm p 439, lemme 2 p 358 et lemme 1 p 670.
GARET et KURTZMANN, *De l'intégration aux probabilités* voir les pages 306 et 307