## 21 Existence de nombre normaux

Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, tout $x \in [0,1[$ admet un unique[3] développement propre en base $r$ :

$$\begin{cases} x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{r^n} \qquad \text{où } \varepsilon_n(x) \in A := \{0,1,\dots,r-1\} \\ \underline{\lim}\, \varepsilon_n(x) < r-1 \end{cases}$$

**Définition.**

1. *On dit que $x \in [0,1[$ est **simplement normal en base** $r$ si pour tout $b \in A$, $\dfrac{n_b}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{r}$, où $n_b = \#\{1 \leq i \leq n \mid \varepsilon_i(x) = b\}$ (le nombre d'occurrence de $b$ dans les $n$ premières lettres du développement de $x$).*
2. *On dit que $x \in [0,1[$ est **normal en base** $r$ si pour tout $k \geq 1$ et pour tout motif $b = (b_1,\dots,b_k) \in A^k$, $\dfrac{n_b}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{r}$, où $n_b = \#\{1 \leq i \leq n-k+1 \mid (\varepsilon_i(x),\dots,\varepsilon_{i+k-1}(x)) = b\}$ (le nombre d'occurrence du motif $b$ dans les $n$ premières lettres du développement de $x$).*
3. *On dit que $x \in [0,1[$ est **normal** ou **totalement normal** si $x$ est normal pour tout $r \geq 2$.*

**Théorème.** *Presque tout réel de $[0,1[$ est normal.*

*Démonstration.*
On se place sur l'espace probabilisé $([0,1[,\mathscr{B}([0,1[,\mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est la mesure de Lebesgue.

Etape 1, Montrons que les v.a. réelles $\varepsilon_n$ sont indépendantes et de même loi uniforme :
Soit $r \geq 2$, $(a_1,\dots,a_N) \in A^N$, on vérifie que :
$E := \{x \in [0,1[,\ \varepsilon_1(x) = a_1,\dots,\varepsilon_N(x) = a_N\} = \left[\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{r^n}, \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{r^n} + \frac{1}{r^N}\right[ := F.$

Soit $x \in E$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{r^n} \leq x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{r^n} <^{4} \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon_n(x)}{r^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{r-1}{r^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{r^n} - \frac{1}{r^N}$,

en effet, $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{r-1}{r^n} = (r-1)\frac{1}{r^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{r-1}{r^{N+1}}\frac{r}{r-1} = -\frac{1}{r^N}$. Donc $x \in F$.

Soit $x \in F$, alors $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{r^n} + \frac{y}{r^N}$ avec $y \in [0,1[$ donc $y = \dfrac{y_1}{r} + \dfrac{y_2}{r^2} + \dots$, alors $x$ s'écrit : $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{r^n} + \frac{y_1}{r^{N+1}} + \frac{y_2}{r^{N+2}} + \dots$, par unicité du développement on a $\varepsilon_1(x) = a_1,\dots,\varepsilon_N(x) = a_N$ donc $x \in E$. Ainsi $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) = \dfrac{1}{r^N}$.

Pour tout $i \in [|1,N|]$, $\mathbb{P}(\varepsilon_i = a_i) = \displaystyle\sum_{a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_N} \mathbb{P}(\varepsilon_1 = a_1,\dots,\varepsilon_N = a_N) = \frac{r^{N-1}}{r^N} = \frac{1}{r}$

donc $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = a_1,\dots,\varepsilon_N = a_N) = \dfrac{1}{r^N} = \displaystyle\prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(\varepsilon_i = a_i)$. Donc les v.a. $\varepsilon_n$ sont indépendantes.

3. La condition $\underline{\lim}\, \varepsilon_n(x) < r-1$ permet par exemple d'éviter en base 10 le développement $0,2 = 0,1999\dots$
4. Cette inégalité est stricte car $\underline{\lim}\, \varepsilon_n(x) < r-1$

ETAPE 2, Soit $r \geq 2$ fixé montrons que $\mathbb{P}(\{x \text{ est normal en base r}\}) = 1$ :
Soit $b \in A$, on pose $\forall i,\ X_i = \mathbf{1}_{\{\varepsilon_i = b\}}$ alors $\dfrac{n_b}{n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et d'après la loi forte des grands nombres : $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{r}$ (ceci étant vrai pour tout $b \in A$ on voit déjà que presque tout $x$ de $[0,1[$ est simplement normal en écrivant $\{x$ simplement normal$\}$ $= \bigcap_{b \in A} \left\{ \frac{n_b}{n} \longrightarrow \frac{1}{r} \right\}$ donc $\mathbb{P}(\{x \text{ simplement normal}\}) = 1$).
Soit maintenant $b$ un motif de longueur 2, $b = (b_1, b_1) \in A^2$, on pose $\forall i, Y_i = \mathbf{1}_{\{\varepsilon_i = b_1, \varepsilon_{i+1} = b_2\}}$, alors $\dfrac{n_b}{n} = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_{n-1}}{n}$. On ne peut pas directement appliquer la loi forte des grands nombres car les v.a. $Y_n$ ne sont plus indépendantes. En revanche elle sont indépendantes de deux en deux : $Y_1, Y_3, \ldots$ sont indépendantes et $Y_2, Y_4, \ldots$ sont indépendantes donc :
$\dfrac{Y_1 + \cdots + Y_{2n-1}}{n} \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = b_1, \varepsilon_2 = b_2) = \dfrac{1}{r^2}$ et $\dfrac{Y_2 + \cdots + Y_{2n}}{n} \xrightarrow{p.s} \dfrac{1}{r^2}$ alors :

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_{2n}}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{Y_1 + \cdots + Y_{2n-1}}{n} + \frac{Y_2 + \cdots + Y_{2n}}{n}\right) \xrightarrow{p.s} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}.$$

De même, $\dfrac{Y_1 + \cdots + Y_{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{Y_1 + Y_3 + \cdots + Y_{2n+1}}{2n+1} + \dfrac{Y_2 + \cdots + Y_{2n}}{2n+1}$

$$= \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)\frac{Y_1 + Y_3 + \cdots + Y_{2n+1}}{n+1} + \left(\frac{n}{2n+1}\right)\frac{Y_2 + \cdots + Y_{2n}}{n} \xrightarrow{p.s} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}.$$

Ainsi, $\dfrac{n_b}{n} = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_{n-1}}{n} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)\dfrac{Y_1 + \cdots + Y_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{p.s} \dfrac{1}{r^2}$.
On peut faire de même avec les motifs de longueur trois, en groupant les variables de trois en trois, puis pour les motifs de longueur $k$. Donc pour tout $k \geq 1$, $\forall b \in A^k$, $\dfrac{n_b}{n} \xrightarrow{p.s} \dfrac{1}{r^k}$.
Remarquons maintenant que $\{x \text{ est normal en base r}\} = \displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{b \in A^k} \left\{ \frac{n_b}{n} \longrightarrow \frac{1}{r^k} \right\}$.
Or $\forall k \geq 1$, $\forall b \in A^k$, $\mathbb{P}(\frac{n_b}{n} \to \frac{1}{r^k}) = 1$ et comme la probabilité d'une intersection fini ou dénombrable d'événements de probabilité 1 vaut 1, on a $\mathbb{P}(\{x \text{ est normal en base r}\}) = 1$

ETAPE 3, On conclut en remarquant que $\{x \text{ est normal}\} = \displaystyle\bigcap_{r \geq 2} \{x \text{ est normal en base r}\}$, ce qui reste une intersection dénombrable d'événement de probabilités 1 donc $\mathbb{P}(\{x \text{ est normal}\}) = 1$, c'est à dire que presque tout $x$ de $[0,1[$ est normal. □

---

*Remarque.* Le résultat est amusant mais ce développement ne rentre que dans la leçon sur indépendance. Je ne sais pas si c'est un développement pertinent.

*Références.*
QUEFFÉLEC et ZUILY, *Analyse pour l'agrégation* page 503 et page 550.
Voir aussi APPEL, *Probabilités pour les non-probabilistes* pages 218 et 219.

*Démonstration de l'unicité du développement.*

Soit $B$ l'ensemble des suites $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ d'élément de $A$ telles que $\underline{\lim}\, \varepsilon_n < r-1$. Si $\varepsilon \in B$ et $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_p(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{p} \frac{\varepsilon_n}{r^n}$ et $S(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{r^n}$. Or $S_{p+1}(\varepsilon) - S_p(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_{p+1}}{r^{n+1}} \leq \frac{r-1}{r^{p+1}} = \frac{1}{r^p} - \frac{1}{r^{p+1}}$ d'où $S_{p+1}(\varepsilon) + \frac{1}{r^{p+1}} \leq S_p(\varepsilon) + \frac{1}{r^p}$ avec une inégalité stricte pour une infinité de $p$ donc $S_p(\varepsilon) + r^{-p}$ décroît de façon non stationnaire vers $S(\varepsilon)$.

Soit maintenant $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1}$, $\alpha \neq \varepsilon$, soit $p$ le plus petit indice tel que $\alpha_p \neq \varepsilon_p$. Si par exemple $\alpha_p > \varepsilon_p$ on a $S_p(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\varepsilon_n}{r^n} + \frac{\varepsilon_p}{r^p} = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\alpha_n}{r^n} + \frac{\varepsilon_p}{r^p} \leq \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\alpha_n}{r^n} + \frac{\alpha_p - 1}{r^p} = S_p(\alpha) - \frac{1}{r^n}$ d'où $S(\varepsilon) < S_p(\varepsilon) + r^{-p} \leq S_p(\alpha) \leq S(\alpha)$ et $S(\varepsilon) < S(\alpha)$. On voit même que l'ordre lexicographique sur $B$ correspond à l'ordre naturel sur $[0,1[$. □

*Tentative de démonstration pour un motif de longueur k.*

Soit $b = (b_1, \ldots, b_k) \in A^k$, on pose $\forall i,\ Z_i = \mathbf{1}_{\{\varepsilon_i = b_1, \ldots, \varepsilon_{i+k-1} = b_k\}}$. Ces v.a. sont indépendantes de $k$ en $k$ : $(Z_1, Z_{k+1}, Z_{2k+1}, \ldots)$ sont indépendantes, $(Z_2, Z_{k+2}, Z_{2k+2}, \ldots)$ sont indépendantes, $\ldots, (Z_k, Z_{2k}, Z_{3k}, \ldots)$ sont indépendantes.

On va montrer que $\forall n \geq 1$, $\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n} \xrightarrow{p.s} \frac{1}{r^k}$, pour cela montrons que $\forall j \in [|0, k-1|]$, $\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{nk+j}}{nk+j} \xrightarrow{p.s} \frac{1}{r^k}$. On note $\sigma(i,n) = Z_i + Z_{k+i} + \cdots + Z_{(n-1)k+i}$.

Pour tout $i \in [|1,k|]$ pour tout $n \geq 1$ les v.a. $Z_i, Z_{k+i}, \ldots, Z_{(n-1)k+i}$ sont indépendantes de même lois donc la loi forte des grands nombres implique $\frac{\sigma(i,n)}{n} \xrightarrow{p.s} \frac{1}{r^k} = \mathbb{P}(\{\varepsilon_i = b_1, \ldots, \varepsilon_{i+k-1} = b_k\})$.

On remarque alors que $\forall j \in [|0, k-1|]$, $Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{nk+j} = \sum_{i=1}^{j} \sigma(i, n+1) + \sum_{i=j+1}^{k} \sigma(k,n)$.

En effet , 
$$\begin{array}{rlcll} Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{nk+j} = & Z_1 + Z_{k+1} + \cdots + Z_{(n-1)k+1} & + & Z_{nk+1} & \}\sigma(1, n+1) \\ + & Z_2 + Z_{k+2} + \cdots + Z_{(n-1)k+2} & + & Z_{nk+2} & \}\sigma(2, n+1) \\ & \vdots & & \vdots & \\ + & Z_j + Z_{k+j} + \cdots + Z_{(n-1)k+j} & + & Z_{nk+j} & \}\sigma(j, n+1) \\ & \vdots & & & \\ + & Z_k + Z_{k+k} + \cdots + Z_{(n-1)k+k} & & & \}\sigma(k,n) \end{array}$$

Donc $\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{nk+j}}{nk+j} = \sum_{i=1}^{j} \frac{\sigma(i,n+1)}{nk+j} + \sum_{i=j+1}^{k} \frac{\sigma(k,n)}{nk+j}$

$= \sum_{i=1}^{j} \frac{n+1}{nk+j} \frac{\sigma(i,n+1)}{n+1} + \sum_{i=j+1}^{k} \frac{n}{nk+j} \frac{\sigma(k,n)}{n} \xrightarrow{p.s} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{k} \frac{1}{r^k} + \sum_{i=j+1}^{k} \frac{1}{k} \frac{1}{r^k} = \frac{1}{r^k}$.

Ce qui montre que $\forall n \geq 1$, $\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n} \xrightarrow{p.s} \frac{1}{r^k}$, alors $\frac{n_b}{n} = \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{n-k+1}}{n} = \left(\frac{n-k+1}{n}\right) \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{n-k+1}}{n-k+1} \xrightarrow{p.s} \frac{1}{r^k}$ □