10 Lemme des noyaux et applications

Lemme. *Soit f un endomorphisme de E et $P = P_1P_2 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ avec $P_1, \dots, P_k$ premier entre eux deux à deux. Alors,* $\mathrm{Ker}(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i(f))$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $k \geq 2$:
Initialisation : Soit $k = 2$, P_1 et P_2 sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout, il existe U et V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $UP_1 + VP_2 = 1$. Montrons que $\mathrm{Ker}(P(f)) = \mathrm{Ker}(P_1(f)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(f))$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(P_1(f)) \cap \mathrm{Ker}(P_2(f))$. On a par la relation de Bézout $(UP_1 + VP_2)(f)(x) = x$, autrement dit, $x = U(f) \circ P_1(f)(x) + V(f) \circ P_2(f)(x) = 0$ (car $x \in \mathrm{Ker}(P_1(f)) \cap \mathrm{Ker}(P_2(f))$).
Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(f))$, on a $x = UP_1(f)(x) + VP_2(f)(x)$, vérifions que $UP_1(f)(x) \in \mathrm{Ker}(P_2(f))$.
C'est en effet le cas car $P_2(f)(UP_1(f)(x)) = P_2UP_1(f)(x) = UP(f)(x) = U(f) \circ P(f)(x) = 0$.
On montre de même que $VP_2(f)(x) \in \mathrm{Ker}(P_1(f))$. On obtient ainsi bien le résultat.
Hérédité : Supposons le résultat démontré au rang k, montrons le au rang $k + 1$. Soit $P = P_1 \dots P_k P_{k+1}$, P_i premiers deux à deux. On pose $P = QP_{k+1}$, les polynômes $Q = P_1 \dots P_k$ et P_{k+1} sont premier entre eux, on obtient alors que $\mathrm{Ker}(P(f)) = \mathrm{Ker}(Q(f)) \oplus \mathrm{Ker}(P_{k+1}(f))$. De plus, par hypothèse de récurrence sur Q on obtient $\mathrm{Ker}(Q(f)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i(f))$, finalement, on a bien $\mathrm{Ker}(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{k+1} \mathrm{Ker}(P_i(f))$.
Conclusion : Le résultat est démontré par récurrence à tout les ordres. □

10.1 Critère de diagonalisabilité

Proposition. *Soit f un endomorphisme de E, alors u est diagonalisable si et seulement si u annule un polynôme scindé à racine simple.*

Démonstration. Prenons u un endomorphisme de E diagonalisable, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres (distinctes) et $E_1, \dots, E_r$ ses sous-espaces propres correspondants. On peut alors vérifier que $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r)$ est un polynôme annulateur de f. En effet, les $(X - \lambda_i)$ sont premier entre eux, par le lemme des noyaux, on obtient $\mathrm{Ker}(P(f)) = (f - \lambda_1 \mathrm{id}) \oplus \dots \oplus (f - \lambda_r \mathrm{id})$.
C'est à dire par définition des sous-espaces propres que $\mathrm{Ker}(P(f)) = E_1 \oplus \dots \oplus E_r = E$ car u est diagonalisable, donc $\mathrm{Ker}(P(f)) = E$ et P annule bien f.

Soit $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ un polynôme annulateur de f, scindé à racine simple. Par le lemme des noyau on obtient alors $E = \mathrm{Ker}(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}) = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id})$ où $I = \{i \in [|1, n|] \mid \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}) \neq \{0\}\}$. Autrement dit pour tout $i \in I$, λ_i est valeur propre de f, et $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}) = E_i$ le sous espace propre associé. D'où $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ et donc f est diagonalisable. □

Remarque. On peut aussi montrer le premier point en prenant $A = \mathrm{Mat}(f)$ dans une certaine base et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Du fait que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}P(A)Q$ il est assez visuel de voir que le polynôme $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ est annulateur. Cependant, il n'est pas à racine simple, il faut faire attention d'enlever les valeurs propres qui se répètent.

10.2 Projecteur

Proposition. *Soit f un endomorphisme de E et $P = P_1P_2\dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ avec $P_1,\dots,P_k$ premier entre eux deux à deux, par le lemme des noyaux on a $\mathrm{Ker}(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^k \mathrm{Ker}(P_i(f))$. Alors pour tout $i \in [|1,k|]$ la projection de $\mathrm{Ker}(P(f))$ sur $\mathrm{Ker}(P_i(f))$ parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} \mathrm{Ker}(P_i(f))$ est un polynôme en f.*

Démonstration. Par le lemme des noyaux on a $\mathrm{Ker}(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^k \mathrm{Ker}(P_i(f))$. Soit $i \in [|1,s|]$, les polynômes P_i et $\prod_{j\neq i} P_j$ sont premier entre eux, donc par Bézout, il existe U_i et V_i tels que $U_iP_i + V_i\prod_{j\neq i} P_j = 1$. Posons $p_i = \left(V_i\prod_{j\neq i} P_j\right)(f)$, on a donc $U_iP_i(f)(x) + p_i(x) = x$. Montrons que p_i est le projecteur de l'espace $\mathrm{Ker}(P(f))$ sur $\mathrm{Ker}(P_i(f))$ parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} \mathrm{Ker}(P_j(f))$.
On a $\mathrm{Im}(p_i) = \mathrm{Ker}(P_i(f))$, en effet

1. $\forall x \in \mathrm{Ker}(P_i(f))$, $x = U_iP_i(f)(x) + \left(V_i\prod_{j\neq i} P_j\right)(f)(x) = p_i(x)$ donc $\mathrm{Ker}(P_i(f)) \subseteq \mathrm{Im}(p_i)$,
2. $\forall y \in \mathrm{Im}(p_i)$, $P_i(f)(y) = P_i(f)(p_i(x)) = P_i(f) \circ \left(V_i\prod_{j\neq i} P_j\right)(f)(x) = \left(V_i\prod_{i=1}^k P_j\right)(f)(x)$ d'où $P_i(f)(y) = V_i(f) \circ P(f)(x) = 0_E$ et donc $\mathrm{Im}(p_i) \subseteq \mathrm{Ker}(P_i(f))$.

On a $\mathrm{Ker}(p_i) = \bigoplus_{j\neq i} \mathrm{Ker}(P_j(f))$, par définition de p_i, $\mathrm{Ker}(p_i) = \mathrm{Ker}\left(V_i(f) \circ \left(\prod_{j\neq i} P_j\right)(f)\right)$ donc $\bigoplus_{j\neq i} \mathrm{Ker}(P_j(f)) = \mathrm{Ker}\left(\left(\prod_{j\neq i} P_j\right)(f)\right) \subseteq \mathrm{Ker}(p_i)$. De plus , par le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(p_i)) + \dim(\mathrm{Im}(p_i)) = \dim(\mathrm{Ker}(P(f))) = \dim\left(\bigoplus_{j\neq i} \mathrm{Ker}(P_j(f))\right) + \dim(\mathrm{Ker}(P_i(f)))$.
Comme $\mathrm{Im}(p_i) = \mathrm{Ker}(P_i(f))$, on obtient l'égalité des dimensions donc le résultat.

□

Remarque. Utilisable de différentes manières et à différents endroits, mais de toute façon à savoir faire.

Références. GOURDON, *Les maths en tête. Algèbre et probabilités* :
Lemme des noyaux p 175, critère de diagonalisabilité p 175 + p 164 et projecteur p 196.
Voir aussi MANSUY et MNEIMNÉ, *Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes* p 39.