12 Réduction de Frobenius

Théorème. *Soit u un endomorphisme de E un espace vectoriel de dimension finie, il existe une des polynômes unitaires $P_1, P_2, \ldots, P_r$ tels que $P_r \mid P_{r-1} \mid \cdots \mid P_1$ et une décomposition en sous-espace stable par u, $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ tel que pour tout i, l'endomorphisme induit $u_{|E_i}$ est cyclique et de polynôme minimal P_i. De plus $P_1 = \mu_u$ le polynôme minimal de u.*

Rappel. On considère $\varphi_{u,x} : P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto P(u)(x) \in E$, on note $E_{u,x}$ l'image de ce morphisme, c'est le plus petit espace stable par u qui contient x, et $u_{|E_{u,x}}$ est cyclique. $\mathbb{K}[X]$ est principal donc $\mathrm{Ker}(\varphi_{u,x}) = (\mu_{u,x})$ où $\mu_{u,x}$ est appelé polynôme minimal local de u en x. On remarquera que pour tout $x \in E$, $\mu_{u,x} \mid \mu_u$.

Il faut trouver un sous-espace cyclique de E tel que le polynôme minimal de l'endomorphisme induit soit le polynôme minimal de u. Ensuite, si l'on arrive à exhiber un complémentaire stable par u, le polynôme minimal de l'endomorphisme induit sur ce complémentaire divisera alors le polynôme minimal de u ce qui assurera les conditions de divisibilité sur les P_i. On obtiendra le résultat par récurrence en appliquant l'hypothèse sur le supplémentaire.

Le premier lemme permet de trouver $E_{u,x}$ un tel sous-espace cyclique en réalisant le polynôme minimal de u comme le polynôme minimal local de u en un certain x. Le second lemme nous permet de construire un supplémentaire à $E_{u,x}$ stable par u.

Lemme. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe $x \in E$ tel que $\mu_u = \mu_{u,x}$.*

Démonstration. On décompose μ_u le polynôme minimal de u en irréductibles sous la forme $\mu_u = \prod_{i=1}^r P_i^{\alpha_i}$. Par le lemme des noyaux on a $E = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$, $\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i})$ est stable par u et on note u_i l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$, on peut montrer que μ_{u_i} le polynôme minimal de u_i est $P_i^{\alpha_i}$.

Soit $i \in [|1, r|]$, montrons qu'il existe x_i tel que $\mu_{u_i,x_i} = \mu_{u_i}$. Supposons par l'absurde que pour tout $x \in \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$, $\mu_{u_i,x} \neq \mu_{u_i}$, alors pour tout x, $\mu_{u_i,x} \mid \mu_{u_i} = P_i^{\alpha_i}$ strictement, donc $\mu_{u_i,x} \mid P_i^{\alpha_i - 1}$. Or pour tout x, $\mu_{u_i,x}(u)(x) = 0$ donc $\forall x \in \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$, $P_i^{\alpha_i-1}(u)(x) = 0$, ce qui contredit la minimalité de μ_{u_i}.

Posons $x = \sum_{i=1}^r x_i$, où $x_i \in \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$ tel que $\mu_{u_i,x_i} = \mu_{u_i}$. Alors $0 = \mu_{u,x}(u)(x) = \mu_{u,x}(u)(\sum_{i=1}^r x_i) = \sum_{i=1}^r \mu_{u,x}(u)(x_i)$, or $\mu_{u,x}(u)(x_i) \in \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$, qui sont en somme directe par le lemme des noyaux donc pour tout $i \in [|1, r|]$ on a $\mu_{u,x}(u)(x_i) = 0$, par définition de μ_{u_i,x_i}, $\mu_{u_i,x_i} = P_i^{\alpha_i} \mid \mu_{u,x}$. Or les P_i sont premier entre eux donc $\prod_{i=1}^r P_i^{\alpha_i} = \mu_u \mid \mu_{u,x}$. □

Lemme. *Soit x tel que $\mu_{u,x} = \mu_x$, alors il existe un supplémentaire stable par u de $E_{u,x}$.*

Démonstration. Soit $d = \deg(\mu_u)$, l'endomorphisme $u_{|E_{u,x}}$ étant cyclique on dispose d'une base $\mathscr{B} = (x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$ de $E_{u,x}$. Soit $\mathscr{B}^* = (e_0^*, \ldots, e_{d-1}^*)$ la base duale de $\mathscr{B}$, on note $\varphi = e_{d-1}^*$, remarquons que pour tout $i \in [|0, d-1|]$, $e_i^* = e_{d-1}^* \circ u^{d-1-i} = \varphi \circ u^{d-1-i}$, donc $\mathscr{B}^* = (\varphi \circ u^{d-1}, \ldots, \varphi \circ u, \varphi)$. Soit Φ le sous-espace de E^* engendré par cette famille, on a $\dim(\Phi) = d$ et $\Phi^{\perp}$ est un s.e.v de E de dimension $n - d$.

Montrons que $\Phi^\perp$ est stable par u. Soit $y \in \Phi^\perp$, alors $\forall i \in [|0, d-1|]$, $\varphi \circ u^i(y) = 0$, vérifions que $u(y) \in \Phi^\perp$, on a premièrement que $\forall i \in [|0, d-2|]$, $\varphi \circ u^i(u(y)) = \varphi \circ u^{i+1}(y) = 0$. Ensuite, $\varphi \circ u^{d-1}(u(y)) = \varphi(u^d(y))$, or le polynôme minimal de u est de degrés d donc $u^d = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u^i$, ainsi, $\varphi(u^d(y)) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \varphi(u^i(x)) = 0$. Donc $\Phi^\perp$ est stable par u.

Montrons que $E_{u,x} \cap \Phi^\perp = \{0\}$, on aura ainsi par les dimension que $E = E_{u,x} \oplus \Phi^\perp$. Soit $y \in E_{u,x} \cap \Phi^\perp$, $y = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(x)$ car $y \in E_{u,x}$ et en appliquant successivement $\varphi \circ u^i$ pour i allant de 0 à $d-1$ on obtient que les a_k sont tous nul donc $y = 0$. □

Démonstration du théorème. On montre le résultat par récurrence sur la dimension de E.
Initialisation : Si $\dim(E) = 1$, c'est vérifié.
Hérédité : On suppose le résultat démontré pour tout espace de dimension inférieur à n, soit E un espace de dimension n. Soit x tel que $\mu_{u,x} = \mu_u$, et F un supplémentaire stable par u de $E_{u,x}$ (on sait que ceci existe par les lemmes). Alors F est de dimension strictement inférieur à n, donc par hypothèse de récurrence il existe $P_2, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P_r \mid P_{r-1} \mid \cdots \mid P_2$ et une décomposition en sous-espace stable par u, $F = \bigoplus_{i=2}^r E_i$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Comme μ_u annule $u_{|F}$, $\mu_{u_{|F}} \mid \mu_u$ donc $P_2 \mid \mu_u$, de plus le polynôme minimal de $u_{|E_{u,x}}$ est μ_u. En notant $E_{u,x} = E_1$ et $\mu_u = P_1$, on obtient le résultat.
Conclusion : Par principe de récurrence le résultat est démontré à tout les ordres. □

Lemme. *Si $P \mid \mu_u$, alors le polynôme minimal de l'endomorphisme induit sur $\mathrm{Ker}(P(u))$ est P.*

Démonstration. On note $F = \mathrm{Ker}(u)$, u_F l'endomorphisme u restreint à F (F est stable par u car u commute avec $P(u)$) et $\mu_u = PQ$. On a déjà que $P(u_F) = 0$ donc que μ_{u_F} divise P.
De plus, $0 = \mu_u(u) = (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ donc $\mathrm{Im}(Q(u)) \subseteq \mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(\mu_{u_F}(u_F))$ or $\mathrm{Ker}(\mu_{u_F}(u_F)) \subseteq \mathrm{Ker}(\mu_{u_F}(u))$ donc $\mathrm{Im}(Q(u)) \subseteq \mathrm{Ker}(\mu_{u_F}(u))$. On obtient que $\mu_{u_F}(u) \circ Q(u) = 0$ donc $\mu_{u_F} Q$ annule u et alors $\mu_u = PQ \mid \mu_{u_F} Q$ c'est à dire $P \mid \mu_{u_F}$. Ainsi $P = \mu_{u_F}$. □

Remarque. Il faut choisir quoi faire, pour moi le plus important réside dans les lemmes. Je trouve que l'argument exhibant le supplémentaire stable de $E_{u,x}$ aurait besoin d'une rédaction un peu plus fluide, c'est à améliorer. Sinon c'est un développement bien recasable.

Références.
Théorème et lemmes : CALDERO et GERMONI, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries : Tome premier* pages 101 à 107 et MANSUY et MNEIMNÉ, *Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes* chapitre 6 page 125.
Lemme : MANSUY et MNEIMNÉ, *Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes* page 38.