10 Transformée de Fourier de la gaussienne

10.1 Première version par une équation différentielle

Théorème.
$\forall a > 0$ *la transformée de Fourier de* $\varphi : x \to e^{-ax^2}$ *est la fonction gaussienne* $\xi \to \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.

Démonstration. Posons $\psi = \mathscr{F}(\varphi)$, $\psi(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x$. On va montrer que ψ vérifie une équation différentielle que l'on pourra résoudre. Vérifions qu'il est possible de dériver ψ sur $\mathbb{R}$:
Soit $f : (\xi, x) \mapsto e^{-i\xi x} e^{-ax^2}$, alors :

i) $\forall \xi$, $x \mapsto f(\xi, x)$ est intégrable car $|f(\xi, x)| \leq e^{-ax^2}$ intégrable.

ii) $\xi \mapsto f(\xi, x)$ est dérivable et $\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, x) = -ixe^{-i\xi x} e^{-ax^2}$

iii) $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, x)(x, t)\right| = \left|ixe^{-i\xi x} e^{-ax^2}\right| \leq |x| e^{-ax^2}$ et $x \mapsto |x| e^{-ax^2}$ est intégrable car est négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{x^2}$.

Le théorème de dérivation sous le signe intégrale s'applique et : $\psi'(t) = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}} ixe^{-i\xi x} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x$

On écrit : $\psi'(t) = \dfrac{i}{2a} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} (-2ax) e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x$ et on souhaite faire une intégration par partie, cependant on ne peut le faire directement sur $\mathbb{R}$, on remarque pour contourner ce problème que :

$$\psi'(t) = \frac{i}{2a} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} (-2ax) e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x =^2 \lim_{n \to +\infty} \frac{i}{2a} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} (-2ax) e^{-ax^2} \mathbf{1}_{[-n,n]} \, \mathrm{d}x$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{i}{2a} \int_{-n}^{n} e^{-i\xi x} (-2ax) e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x &= \frac{i}{2a} \left[e^{-i\xi x} e^{-ax^2} \right]_{-n}^{n} + \frac{i}{2a} \int_{-n}^{n} i\xi e^{-i\xi x} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{i}{2a} e^{-an^2} (e^{-i\xi n} - e^{i\xi n}) - \frac{\xi}{2a} \int_{-n}^{n} e^{-i\xi x} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

On a $\lim_{n \to \infty} e^{-an^2} (e^{-i\xi x} - e^{i\xi x}) = 0$ car $(e^{-i\xi x} - e^{i\xi x})$ est borné, d'où : $\psi'(t) = 0 - \frac{\xi}{2a} \psi(\xi)$.
Alors, ψ est de la forme $\psi(\xi) = \psi(0) e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$, or $\psi(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ d'où :

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

□

Remarque. ⚠ CANDELPERGHER n'utilise pas la même convention de transformée de Fourier que moi, j'ai modifié la démo (ce sont des changements minimes). Développement trop court, à coupler avec autre chose (ex : calculer l'intégrale de Gauss et montrer le théorème.)

Références. CANDELPERGHER, *Calcul intégral.* pages 356-358.

2. On peut voir ceci comme une conséquence du théorème de convergence dominée de Lebesgue sur la fonction : $e^{-i\xi x} (-2ax) e^{-ax^2} \mathbf{1}_{[-n,n]} \leq e^{-i\xi x} (-2ax) e^{-ax^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

10.2 Deuxième version par la formule de Cauchy

Théorème.
Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$, *alors* $\hat{f} = \sqrt{\pi} e^{-t^2/4}$.

Démonstration. En remarquant que $x^2 + ix\xi = (x + i\xi/2)^2 + \xi^2/4$, on obtient :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-(ix\xi + x^2)} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i\xi/2)^2 - \xi^2/4} \,\mathrm{d}x = e^{-\xi^2/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i\xi/2)^2} \,\mathrm{d}x$$

Il reste donc à calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i\xi/2)^2} \,\mathrm{d}x$, considérons pour cela la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ qui holomorphe sur $\mathbb{C}$ et le lacet Γ suivant :

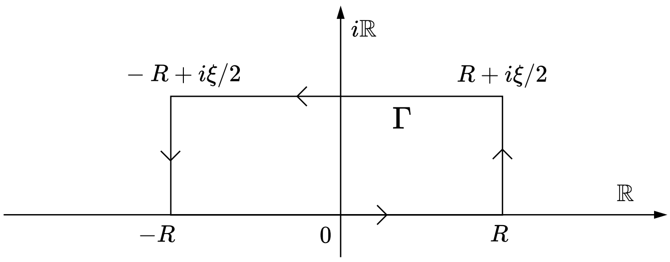

FIGURE 3 – Le lacet Γ

Par le théorème de Cauchy, la fonction étant holomorphe on obtient :

$$0 = \int_{\Gamma} e^{-z^2} \,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x + \int_0^{\xi/2} e^{-(R+it)^2} i \,\mathrm{d}t - \int_{-R}^{R} e^{-(x+i\xi/2)^2} \,\mathrm{d}x - \int_0^{\xi/2} e^{-(-R+it)^2} i \,\mathrm{d}t.$$

On a lorsque R tend vers $+\infty$:

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \int_{-R}^{R} e^{-(x+i\xi/2)^2} \,\mathrm{d}x \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}}^{0} e^{-(x+i\xi/2)^2} \,\mathrm{d}x$$

Il reste à évaluer la limite des intégrales entre 0 et $\xi/2$, or on a :

$$\left| \int_0^{\xi/2} e^{-(\pm R+it)^2} i \,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{\xi/2} \left| e^{-(\pm R+it)^2} i \right| \mathrm{d}t = \int_0^{\xi/2} \left| e^{-R^2 \pm 2iRt + t^2} \right| \mathrm{d}t = e^{-R^2} \int_0^{\xi/2} e^{t^2} \,\mathrm{d}t,$$

donc ces deux intégrales tendent donc vers 0. Finalement on obtient en passant à la limite dans l'égalité précédente : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i\xi/2)^2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ et donc $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}$ $\square$

Références.

CANDELPERGHER, *Calcul intégral* page 106 (⚠ convention Fourier).
EL AMRANI, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels : niveau M1* page 156 (je prend $a = 1$ ici pour aller plus vite).

10.3 Troisième version par prolongement analytique

Théorème.
Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$, *alors* $\hat{f} = \sqrt{\pi}e^{-t^2/4}$.

Démonstration. Posons pour $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Montrons à l'aide du théorème d'holomorphie sous le signe intégrale que la fonction F est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On vérifie les hypothèse :

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto e^{zx}e^{-x^2}$ est continue donc mesurable.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{zx}e^{-x^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
3. Soit K un compact de $\mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto \Re(z)$ est continue sur K donc bornée : il existe M tel que pour tout $z \in K$, $\Re(z) \leq M$. On en déduit que pour tout $(z, x) \in K \times \mathbb{R}$, $|e^{zx}e^{-x^2}| = |e^{\Re(z)x}e^{-x^2}| \leq e^{M|x|-x^2}$ ce qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Les trois hypothèses du théorème sont vérifiées et la fonction F est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$. On remarque que l'on peut facilement calculer la valeur de F sur l'axe des réels, en effet pour $y \in \mathbb{R}$, $F(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{yx-x^2}\,\mathrm{d}x$. En posant $t = x - \frac{y}{2}$, on a $-t^2 = -x^2 + xy - \frac{y^2}{4}$ et donc

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{yx-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{y^2}{4}-t^2}\,\mathrm{d}t = e^{y^2/4}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}e^{y^2/4}.$$

Or la fonction $z \mapsto \sqrt{\pi}e^{z^2/4}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et coïncide sur la droite réelle avec F, donc par le principe du prolongement analytique elles sont égales sur $\mathbb{C}$ tout entier. En particulier sur l'axe des imaginaire pur $i\mathbb{R}$ et donc

$$\sqrt{\pi}e^{-t^2/4} = F(-it) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \hat{f}(t).$$

D'où le résultat. □

Remarque.
⚠ la convention des auteurs pour la transformée de Fourier semble être la conjuguée de la mienne, il y a juste la dernière ligne ($F(it)$ à la place de $F(-it)$) à changer car la fonction est paire. Notons qu'il s'agit du même argument que dans la densité des polynômes orthogonaux !
Une fois que l'on a obtenu $\mathscr{F}(e^{-x^2}) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$ on obtient facilement par changement de variable ($u = \sqrt{a}x$) que $\mathscr{F}(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-\xi^2/4a}$.

Références. Beck, Malick et Peyré, *Objectif Agrégation* page 83