13 Équation de la chaleur sur le cercle ♡

Théorème. *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T})$ telle que*

i) $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ *pour* $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$,

ii) $\lim_{t\to 0} ||u(\cdot,t) - u_0||_{L^2} = 0$.

Démonstration. On procède par Analyse - Synthèse.
ANALYSE : Pour tout $t > 0$ la fonction $x \mapsto u(x,t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ donc par le théorème de Dirichlet, pour tout $t > 0$ on a $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t)e^{inx}$ où :

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,t)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \langle u(x,t), e^{inx}\rangle_{L^2}.$$

La fonction u vérifie une équation différentielle il est naturel de chercher à savoir si il en est de même pour $c_n(t)$. Montrons qu'il est possible de dériver les $c_n(t)$, soit I un segment de $\mathbb{R}_+^*$.

1. Pour tout $t \in I$, $x \mapsto u(x,t)e^{-inx} \in L^1(\mathbb{T})$ car $u(\cdot,t) \in \mathcal{C}^2$,
2. Pour tout $x \in \mathbb{T}$, $t \mapsto u(x,t)e^{-inx}$ est dérivable de dérivée $\partial_t u(x,t)e^{-inx}$ et

$$\left|\partial_t u(x,t)e^{-inx}\right| \leq ||\partial_t u||_{\infty,\mathbb{T}\times I}.$$

On peut donc dériver les c_n sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et par intégration par parties :

$$\begin{aligned} c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_t u(x,t)e^{-inx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_x^2 u(x,t)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\partial_x u(x,t)e^{-inx}\right]_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_x u(x,t)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Le terme crochet s'annule car $u(\cdot,t)$ est 2π périodique donc $\partial_x u(\cdot,t)$ est 2π périodique. Par une seconde intégration par parties et périodicité de u on obtient :

$$c_n'(t) = \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_x u(x,t)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{in}{2\pi}\left[u(x,t)e^{-inx}\right]_0^{2\pi} + \frac{i^2n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,t)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = -n^2c_n(t).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(t) = A_n e^{-n^2t}$, on utilise la condition limite pour calculer A_n. Comme $u_0 \in L^2$, $u_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ avec $a_n = \langle u_0, e^{inx}\rangle_{L^2}$ or $\lim_{t\to 0} ||u(\cdot,t) - u_0||_{L^2} = 0$, donc par continuité du produit scalaire, $c_n(t) = \langle u(x,t), e^{inx}\rangle_{L^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \langle u_0, e^{inx}\rangle_{L^2} = a_n$ et comme $c_n(t) \xrightarrow[t\to 0]{} A_n$ on obtient $A_n = a_n$. Finalement pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $c_n(t) = a_n e^{-n^2t}$.

L'analyse conclut donc que nécessairement $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-n^2t}e^{inx}$ où a_n sont les coefficients de Fourier de u_0.

SYNTHÈSE : On pose $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-n^2t}e^{inx}$, vérifions les différentes propriétés :

1. La fonction $x \longmapsto u(x,t)$ est bien 2π périodique.

2. La fonction u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}_+^*$, en particulier $\mathcal{C}^2$. En effet, soit $t_0 > 0$, alors pour tout $t \geq t_0$, pour tout $a, b \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$\left|\partial_t^a \partial_x^b a_n e^{-n^2 t} e^{inx}\right| = \left|a_n (-1)^a n^{2a} e^{-n^2 t} i^b n^b e^{inx}\right| = |a_n| n^{2a+b} e^{-n^2 t} \leq C n^{2a+b} e^{-n^2 t_0}$$

   Ce qui est sommable (on a majoré $|a_n|$ par $C \in \mathbb{R}$ car les $|a_n|$ sont bornés car $u_0 \in L^2$). Donc pour tout $t_0 > 0$, u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{T} \times [t_0, +\infty[$ donc u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}_+^*$.

3. La fonction u étant $\mathcal{C}^\infty$ on a par construction que $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$, donc $i)$ est vérifié.

4. On a pour tout $(x, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+^*$, $u(x, t) - u_0(x) = \sum_{n \in Z} a_n e^{inx}(e^{-n^2 t} - 1)$ par Parseval, $||u(x, t) - u_0(x)||_{L^2}^2 = \sum_{n \in Z} |a_n(e^{-n^2 t} - 1)|^2$. Or pour tout n, $|a_n(e^{-n^2 t} - 1)|^2 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $|a_n(e^{-n^2 t} - 1)|^2 \leq |a_n|^2$ qui est sommable car $u_0 \in L^2$. Par convergence dominée on obtient

$$||u(x, t) - u_0(x)||_{L^2}^2 = \sum_{n \in Z} |a_n e^{inx}(e^{-n^2 t} - 1)|^2 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

   Ce qui vérifie $ii)$.

□

Recasage. Leçons :

1. 222 comme EDPL
2. 239 comme illustration de la dérivation sous l'intégrale (clef de la résolution) et des limites
3. 246 comme utilisation des séries de Fourier

Références. ⚠ pas de référence.