4 Fourier-Plancherel et transformée de Fourier dans L^2 ♡

Rappel. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathscr{F}(e^{-||x||^2/2}) = (2\pi)^{d/2}e^{-|||x||^2/2}$.

Rappel. On rappelle que γ_ε définie par $\gamma_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}}e^{-\frac{||x||^2}{2\varepsilon}}$ est une approximation de l'unité.

Note. On note $\mathscr{F}(f)$ ou $\hat{f}$ la transformée de Fourier de $f \in L^1$, $\mathscr{F} : f \mapsto \hat{f}$.

Lemme. *On a :*

1. $\mathscr{F}(\gamma_\varepsilon)(\xi) = e^{-\varepsilon||\xi||/2}$,
2. $\mathscr{F}(e^{-\varepsilon||x||/2}) = (2\pi)^d\gamma_\varepsilon$.

Théorème (Plancherel-Parseval)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, on a : $||\hat{f}||^2_{L^2} = (2\pi)^d||f||^2_{L^2}$. En particulier, $\mathscr{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ et de plus, $\mathscr{F}(L^1 \cap L^2)$ est dense dans L^2.*

Théorème. *L'application linéaire continue $\mathscr{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ se prolonge de façon unique en une isométrie de L^2 dans L^2.*

Démonstration du lemme. Il s'agit d'une application directe des formules d'homothétie et d'inversion de Fourier :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\gamma_\varepsilon)(\xi) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}}\mathscr{F}\left(e^{-\frac{||x||^2}{2\varepsilon}}\right) &= \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}}\varepsilon^{d/2}\mathscr{F}\left(e^{-\frac{||x||^2}{2}}\right)(\varepsilon^{1/2}\xi)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}(2\pi)^{d/2}e^{-||\xi||^2/2} = e^{-\varepsilon||\xi||^2/2}.\end{aligned}$$

Ce qui montre la première formule, remarquons que $e^{-\varepsilon||\xi||^2/2} \in L^1$ donc par inversion de Fourier et par parité de γ_ε :

$$\mathscr{F}(e^{-\varepsilon||\xi||^2/2})(\xi) = \mathscr{F}\mathscr{F}(\gamma_\varepsilon)(\xi) = (2\pi)^d\gamma_\varepsilon(-\xi) = (2\pi)^d\gamma_\varepsilon(\xi).$$

□

Remarque. Soit $f \in L^1 \cap L^2$, on cherche à montrer que $||\hat{f}||^2_{L^2} = (2\pi)^d||f||^2_{L^2}$, si $\mathscr{F}(f) \in L^1$ on pourrait écrire par inversion de Fourier et formule de dualité :

$$\begin{aligned}||f||^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d}\overline{f}f\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\overline{f}(x)\ \mathscr{F}\mathscr{F}(f)(-x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathscr{F}(\overline{f})(x)\mathscr{F}(f)(-x)\mathrm{d}x\\ = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\overline{\mathscr{F}(f)}(-x)\mathscr{F}(f)(-x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\overline{\hat{f}}\hat{f}\mathrm{d}x = ||\hat{f}||^2_{L^2}.\end{aligned}$$

Cependant pour $f \in L^1$, $\mathscr{F}(f)$ n'est pas forcement dans L^1 et la formule d'inversion n'est plus licite. Pour contourner ce problème on considère f_ε une approximation de f (convolution de f avec une approximation de l'unité) de sorte que l'on puisse utiliser le même raisonnement que ci-dessus. Le résultat tombera ensuite en passant à la limite, par la continuité du produit scalaire et par les propriétés de convergence des approximations de l'unité.

Démonstration de Plancherel-Parseval. Soit $f \in L^1 \cap L^2$, on pose $f_\varepsilon = \gamma_\varepsilon * f$, on a alors :

1. $\lim_{\varepsilon \to 0} ||f_\varepsilon - f||_{L^2} = 0$ car $f \in L^2$ et γ_ε est une approximation de l'unité,
2. $f_\varepsilon = \gamma_\varepsilon * f \in L^1$ car $\gamma_\varepsilon \in L^1$ et $f \in L^1$,
3. $\hat{f_\varepsilon} = \hat{\gamma_\varepsilon} \times \hat{f} \in L^1$ car $\hat{\gamma_\varepsilon} \in L^1$ et $\hat{f}$ est bornée.

On s'intéresse à la quantité $\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f}(x) f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \langle f, f_\varepsilon \rangle_{L^2}$. Nous allons exprimer cette quantité de deux façon différentes, en passant à la limite on obtiendra le résultat. Par continuité du produit scalaire on obtient déjà :

$$||f||^2 = \langle f, f \rangle_{L^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle f, f_\varepsilon \rangle_{L^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f}(x) f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\langle f, f_\varepsilon \rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f}(x) f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f}(x) \frac{1}{(2\pi)^d} \mathscr{F}\mathscr{F}(f_\varepsilon)(-x)\,\mathrm{d}x \text{ par inversion de Fourier car } f_\varepsilon \text{ et } \hat{f_\varepsilon} \text{ sont } L^1 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f}(x) \mathscr{F}(\hat{\gamma_\varepsilon}\hat{f})(-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}(\overline{f})(x) (\hat{\gamma_\varepsilon}\hat{f})(-x)\,\mathrm{d}x \text{ par la formule de dualité, ces fonctions étant } L^1 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathscr{F}(f)}(-x) \hat{f}(-x) \hat{\gamma_\varepsilon}(-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{f}}(-x) \hat{f}(x) e^{-\varepsilon||x||/2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Or $e^{-\varepsilon||x||/2}$ tend en croissant vers 1 lorsque ε tend vers 0, donc par convergence monotone :

$$\langle f, f_\varepsilon \rangle_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{f}}(-x) \hat{f}(x) e^{-\varepsilon||x||/2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{f}}(-x) \hat{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^d} ||\hat{f}||_{L^2}^2$$

On obtient ainsi l'égalité $(2\pi)^d ||f||_{L^2}^2 = ||\hat{f}||_{L^2}^2$, et donc $\mathscr{F}(L^1 \cap L^2) \subseteq L^2$.

Pour montrer que $\mathscr{F}(L^1 \cap L^2)$ est dense dans L^2 on va montrer que $\mathscr{F}(L^1 \cap L^2)^\perp = \{0\}$. Soit $f \in \mathscr{F}(L^1 \cap L^2)^\perp \cap L^2$, on considère pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ les fonctions $g_a : x \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^d} e^{i\langle a, x \rangle} e^{-\varepsilon||x||/2}$. On a $g_a \in L^1 \cap L^2$ et

$$\hat{g}_a(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathscr{F}\left(e^{i\langle a, x \rangle} e^{-\varepsilon||x||/2}\right)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathscr{F}\left(e^{-\varepsilon||x||/2}\right)(\xi - a) = \gamma_\varepsilon(\xi - a).$$

Alors, comme $g_a \in L^1 \cap L^2$:

$$(\gamma_\varepsilon * \overline{f})(a) = \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_\varepsilon(a - x) \overline{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_\varepsilon(x - a) \overline{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}_a(x) \overline{f}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

On a donc $\gamma_\varepsilon * \overline{f} = 0$ et comme γ_ε est une approximation de l'unité $\lim_{\varepsilon \to 0} ||\gamma_\varepsilon * \overline{f} - \overline{f}||_{L^2}^2 = 0$ on obtient $\overline{f} = 0$ d'où $f = 0$ (dans L^2). □

Démonstration du théorème. Montrons que $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 : soit $f \in L^2$, on pose $f_n = \mathbf{1}_{B(0,n)} f$, on a alors $f_n \in L^2$ et de plus $f_n \in L^1$ car par Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{B(0,n)|f(x)|} \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} \times \left(\int_{B(0,n)} 1 \mathrm{d}x \right)^{1/2} < \infty.$$

On a $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{||x||>n} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $f \in L^2$, donc $f \in L^2$ est limite dans L^2 des fonctions $f_n \in L^1 \cap L^2$: on a montré que $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2. Par le théorème de prolongement des applications linéaires continues, $\mathscr{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ se prolonge de façon unique en une application linéaire continue $\mathscr{F} : L^2 \to L^2$.

De plus, pour tout $g \in L^2$, par densité de $\mathscr{F}(L^1 \cap L^2)$ dans L^2, il existe une suite $(f_n)_n$ dans $L^1 \cap L^2$ telle que $\mathscr{F}(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g$. La suite $(\mathscr{F}(f_n))_n$ est donc de Cauchy et comme $\mathscr{F}$ est une isométrie sur $L^1 \cap L^2$, $(f_n)_n$ aussi est une suite de Cauchy dans L^2. Comme L^2 est complet, cette suite converge vers un $f \in L^2$ et par continuité de $\mathscr{F}$ on obtient $\mathscr{F}(f) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(f_n) = g$. La transformée de Fourier-Plancherel est donc surjective. □

Recasage. Leçons 201,207,234 et 250.

Remarque. Pour moi incontournable, intéressant et recasable. Je suis passé le jour J sur ce développement en ne faisant que la démonstration de Plancherel-Parseval avec la densité de $\mathscr{F}(L^1 \cap L^2)$ dans L^2 et ça c'est bien passé (le jury a ensuite demandé d'expliquer comment fonctionne le reste de la démo, comment concrètement prolonger une application linéaire continue...).

Références. ⚠ Pas vraiment de référence mais je me retrouvais comme ça :

Dans EL AMRANI, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels : niveau M1* :

- Page 86 et 87 : Définition et théorème des approximations de l'unité.
- Chapitre 3 : Toute les propriétés utilisées (inversion, dualité, homothétie...).
- Page 118 : idée de la démo de Plancherel-Parseval.
- Page 115 (démo thm 1.19) : idée du calcul $(\gamma_\varepsilon * f)$ pour la densité de $\mathscr{F}(L^1 \cap L^2)$.

Dans RUDIN, *Analyse réelle et complexe : cours et exercices* :

- Page 106 : idée dans la démo finale pour les suite de Cauchy.
- Page 226 : idée générale des démo et de la densité de $\mathscr{F}(L^1 \cap L^2)$ dans L^2.