204. Connexité. Exemples et applications

Cadre : X est un espace topologique

I. Espaces connexes

1) Définition et caractérisations [EHH]

Définition 1 : X est connexe s'il n'est pas réunion de deux ouverts non vides disjoints. Autrement dit, pour tous ouverts disjoints U et V tels que $X = U \sqcup V$, $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

Théorème 2 : Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) X est connexe
2) X n'est pas réunion de deux fermés non vides disjoints
3) Il n'existe pas dans X d'autres parties qui soient à la fois ouvertes et fermées autres que X et $\emptyset$.
4) Toute application continue de X dans $\mathbb{Z}$ est constante
5) Toute application continue de X dans $\{0,1\}$ est constante

Exemple 3 :

1) Tout espace muni de la topologie grossière est connexe
2) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont connexes.

2) Parties connexes [EHH]

Définition 4 : On dit qu'une partie A d'un espace topologique X est un ensemble connexe si A munie de la topologie induite est un espace connexe

Exemple 5 :

1) Dans un espace topologique, l'ensemble vide et tout ensemble réduit à un point est connexe
2) Dans un espace topologique séparé, tout ensemble fini comprenant plus d'un point et plus généralement tout ensemble non réduit à un point et possédant au moins un point isolé est non connexe

Proposition 6 : Soit A une partie connexe de X.

1) Si U et V sont des ouverts (resp fermés) disjoints de X tels que $X = U \sqcup V$, alors ou bien $A \subset U$ ou bien $A \subset V$.
2) Si U est une partie à la fois ouverte et fermée de X et si $A \cap U \neq \emptyset$, alors $A \subset U$.

Exemple 7 : $\mathbb{Q}$ n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. $\mathbb{Q} \subset]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Lemme 8 (de passage des douanes) Soit A une partie de X. Toute partie connexe C de X qui rencontre l'intérieur de A et l'extérieur de A rencontre aussi la frontière de A.

3) Stabilité de la notion de connexité [EHH] [Quef]

Théorème 9 :

a) Si les A_i sont connexes dans X et si pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.
En particulier, si $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

b) Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite de parties connexes de X telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ est connexe.

Théorème 10 : Soient X et Y deux espaces topologiques

a) Soit $f : X \to Y$ une application continue. Si X est connexe $f(X)$ est également connexe

b) Si $A \subset ~~X~~$ est connexe et si $A \subset B \subset \bar{A}$, B est connexe.
En particulier si A est connexe, $\bar{A}$ est connexe.

Corollaire 11 : Si X et Y sont des espaces topologiques homéomorphes, alors X est connexe si et seulement si Y est connexe.

Théorème 12 : Soient $(X_i)_{i \in I}$ des espaces topologiques non vides et $X = \prod_{i \in I} X_i$. On a équivalence entre

1) X_i est connexe pour tout $i \in I$
2) X est connexe.

4) Composantes connexes

Proposition-définition 13 : On définit une relation binaire $\sim$ par : $x \sim y$ si et seulement si il existe un connexe C de X tel que $\{x, y\} \subset C$. Cette relation est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de $\sim$ s'appellent les composantes connexes de X. La classe de x pour $\sim$ notée $C(x)$ s'appelle la composante connexe de x

Proposition 14 : Soit $x \in X$.

a) $C(x)$ est la réunion de tous les connexes contenant x ; c'est le plus grand connexe contenant x
b) $C(x)$ est un fermé dans X

Exemple 15 : $\mathbb{R}^*$ a deux composantes connexes : $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$.

Proposition 16 : Si $X = \bigsqcup_I \omega_i$ où les ω_i sont ouverts connexes non vides, alors les ω_i sont les composantes connexes de X.

5) Connexité par arcs [EHH] [Queff]

Définition 17 : Soit $(x,y) \in X^2$. Un chemin dans X reliant x à y est une application continue $\varphi : [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$

Lemme 18 : On définit dans X la relation suivante :

$$x \sim y \iff \text{il existe un chemin dans } X \text{ reliant } x \text{ à } y.$$

Alors $\sim$ est une relation d'équivalence dans X.

Définition 19 : On dit que X est connexe par arcs si X possède une unique classe d'équivalence pour la relation $\sim$.

Exemple 20 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'épigraphe de f : $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, y \geq f(x)\}$ est connexe par arcs.

Proposition 21 : Si X est connexe par arcs, alors X est connexe.

Remarque 22 : La réciproque est fausse en général :

Exemple 23 : $X = \{(0,y) \, ; -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x}), x \in]0,1]\}$ est connexe mais pas connexe par arcs

Proposition 24 : si X est un ouvert d'un espace vectoriel normé et connexe, alors X est connexe par arcs

II Utilisation de la connexité

1) Analyse réelle [EHH]

Théorème 25 : Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$

Corollaire 26 (Théorème des valeurs intermédiaires) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue

1) $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, ie pour tous $\alpha, \beta \in f(I)$, $y \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq y \leq \beta$, il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$.
2) Si $I = [a,b]$, alors $f(I) = [c,d]$.

Application 27 : Toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ possède un point fixe.

Proposition 28 : Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) L'application f est ouverte
2) L'application f est injective
3) L'application f est strictement monotone

Corollaire 29 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit $J = f(I)$. Alors f est un homéomorphisme de I sur J si, et seulement si f est continue et strictement monotone.

2) Analyse complexe [Tau] [LM]

Théorème-définition 30 : Soient $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un lacet, $U = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\,\gamma$. Pour $z \in U$, on pose

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$$

L'application $\begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z) \end{array}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de U, nulle sur la composante non bornée. On dit que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est l'indice de z par rapport à γ.

Remarque 31 : Intuitivement, $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est le nombre de tours (avec un signe) décrit par $\gamma(t)$ autour de z quand t décrit $[a,b]$.

Théorème 32 (Principe des zéros isolés) Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non identiquement nulle. L'ensemble des zéros de f est une partie localement finie de Ω

Application 33 : Soit Ω un ouvert connexe contenant 0. Il n'existe pas de fonction analytique $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ assez grand}$$

Théorème 34 : Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f et g des fonctions analytiques sur Ω qui coïncident au voisinage d'un point de Ω. Alors $f=g$.

Définition 35 : Une fonction locale est un couple (f,D) où D est un disque ouvert non vide et $f \in H(D)$.

Définition 36 : Soient (f,D) une fonction locale et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ une courbe. Un prolongement analytique de (f,D) le long de γ est une famille de fonctions locales $(f_t, D_t)_{t\in[0,1]}$ telle que

a) $(f_0, D_0) = (f, D)$

b) Pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t)$ est le centre de D_t

c) Pour tout $t\in[0,1]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t' \in [0,1]$ vérifiant $|t-t'|<\varepsilon$, $\gamma(t') \in D_t \cap D_{t'}$ et $f_t = f_{t'}$ sur cette intersection

DEV 1 **Théorème 37** : Soient (f,D) une fonction locale et γ un chemin tel que $\gamma(0)$ soit le centre de D. Si (f_1, D_1) et $(\tilde{f}_1, \tilde{D}_1)$ sont les éléments terminaux de deux prolongements analytiques de (f,D) le long de γ, alors $f_1 = \tilde{f}_1$ sur $D_1 \cap \tilde{D}_1$

Théorème 38 (Principe du maximum) : Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe sur Ω. On note $M = \sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$.

Alors $\forall z \in \Omega$, $|f(z)| \leq M$.

Proposition 39 : Avec les mêmes hypothèses, si $|f|$ atteint son maximum en $a \in \Omega$, alors f est constante sur la composante connexe de Ω qui contient a.

Application 40 : Soit $f \in H(D(0,1))$ continue sur $\overline{D}(0,1)$ qui ne s'annule pas et telle que $|f|=1$ sur $C(0,1)$, alors f est constante.

III. Connexité dans l'espace des matrices [FGN][Zav]

$n \geq 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 41 : Soit $n\geq 2$. On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ où $i \neq j$ et matrice de dilatation toute matrice diagonale de la forme $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha-1)E_{i,i}$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Théorème 42 : $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvection

Corollaire 43 : $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvection et de dilatation.

Application 44 : $SL_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs. Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Remarque 45 : $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

DEV 2 **Théorème 46** : L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

Proposition 47 : L'ensemble des matrices de rang r ($r \in [\![0,n]\!]$) est connexe.

Références

[EHH] Topologie générale et espaces normés, El Hage Hassan

[FGN] Oraux X-ENS, Algèbre 2

[LM] 131 développements pour l'oral, Lesire, Montagnon

[Quef] Topologie, Queffélec

[Tau] Analyse complexe pour la licence 3, Tauvel

[Zav] Un max de math, Zavidovique