201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications

I. Espace des fonctions continues

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, X une partie non vide d'un espace vectoriel de dimension finie (de E) F.

1. Définitions

Définition 1 : Soit $f : X \to E$ une fonction. On dit que f est continue en $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur X si elle est continue en tout point de X.

+ convergence uniforme

Définition 2 : Soient (f_n) une suite de fonctions de X sur E et $f : X \to E$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in X,\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Remarque 3 : On peut munir l'espace vectoriel $B(X,E)$ des applications bornées sur X d'une norme en posant, pour tout $f \in B(X,E)$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$. Cette norme est appelée la norme de la convergence uniforme.

Définition 4 : Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions d'un espace métrique (E,d) vers $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ d(x,y) \leq \eta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F},\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

2) Suite de fonctions continues

Proposition 5 : Si (f_n) converge uniformément vers f, alors (f_n) converge simplement vers f.

Remarque 6 : La réciproque est fausse : $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$

Théorème 7 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de X dans E qui converge uniformément vers f. Si les fonctions f_n sont toutes continues en $a \in X$, alors f est continue en a.
Si les fonctions f_n sont toutes continues sur X, alors f est continue sur X.

Application 8 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Alors $(f_n \circ f_n)$ converge simplement vers $f \circ f$.

Théorème 9 (Double limite) : Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans E convergeant uniformément sur X vers f, $a \in \bar{X}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la limite b_n de $f_n(x)$ quand $x \to a$ existe. Si E est complet, alors (b_n) a une limite b, et

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

3. Fonctions continues sur un compact.

Proposition 10 : Soient K un compact et $f : K \to E$ une fonction continue. Alors f est bornée et il existe $x_0 \in K$ tel que $\|f(x_0)\| = \sup_{x\in K} \|f(x)\|$.

Théorème 11 (Heine) : Toute fonction continue sur un espace métrique compact y est uniformément continue.

Théorème 12 (Stone-Weierstrass) : Soient K un espace compact et A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.
On suppose que :
1) A sépare les points : $\forall (x,y) \in K^2,\ x \neq y \Rightarrow \exists f \in A,\ f(x) \neq f(y)$.
2) A contient les constantes

Alors A est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

Exemple 13 : Soient (K,d) un espace métrique compact, D une partie dense de K. On définit, pour tout $a \in K$, $d_a : x \mapsto d_a(x) = d(a,x)$.
La sous-algèbre A engendrée par $\mathbb{1}$ et $\{d_a, a \in D\}$ est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

Théorème 14 (Stone-Weierstrass, complexe) : Soient K un espace compact et A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$:
On suppose que :
1) A sépare les points de K
2) A contient les fonctions constantes
3) A est stable par conjugaison : $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$.

Alors A est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$.

DEV1

Théorème 15 (Weierstrass) : Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Remarque 16 : L'hypothèse de continuité sur un segment est primordiale. La limite uniforme d'une suite de polynômes est nécessairement un polynôme.

Application 17 : Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)\, t^n\, dt = 0$.

Alors $f \equiv 0$.

Théorème 18 (Weierstrass trigonométrique) : Toute fonction continue et 2π périodique sur $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques

Application 19 : La fonction caractéristique caractérise la loi.

Théorème 20 (Ascoli) : Soient X un espace métrique compact et $\mathcal{F}$ une famille de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X)$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est bornée et équicontinue.

Corollaire 21 : Soit X un espace métrique compact. Les compacts de de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ sont les parties fermées bornées et équicontinues.

Application 22 : Soit $K \in \mathcal{C}([0,1]^2)$. $T_K : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1])$
$f \longmapsto T_K f : x \mapsto \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy$
est un opérateur compact (ie, $\overline{T_K(B_{\mathcal{C}([0,1])})}$ est un compact de $\mathcal{C}([0,1])$)

II. Espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

1. Construction
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré

Définition 23 : Soit $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction étagée positive. L'intégrale de f par rapport à la mesure μ est définie par
$$\int_X f\, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \mu(\{f = \alpha_i\}).$$

Lemme 24 (Approximation) : Toute fonction mesurable positive est limite croissante d'une suite de fonctions étagées positives.

Définition 25 : Soit f une fonction mesurable positive. On définit l'intégrale de f sur X par rapport à la mesure μ par
$$\int_X f\, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi\, d\mu,\ \varphi \leq f,\ \varphi \text{ étagée positive} \right\}$$
On dit que f est μ-intégrable si $\int_X f\, d\mu < +\infty$.

Théorème 26 (Beppo-Levi ou convergence monotone) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\int_X \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$

Définition 27 : Soit f une fonction mesurable. Si $\int_X |f|\, d\mu < +\infty$, on définit l'intégrale de f sur X par rapport à la mesure μ par
$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu,$$
où $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$.

Notation 28 : On note $\mathcal{L}^1(X)$ l'ensemble des fonctions mesurables telles que $\int_X |f|\, d\mu < +\infty$. On pose $L^1 = \mathcal{L}^1/\sim$ où $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ μ-p.p.

2. Théorèmes de convergence

Lemme 29 (Fatou) : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positive sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Alors
$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Exemple 30 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables qui converge μ-p.p vers f. On suppose que $\sup_{n\geq 0} \int_X |f_n|\, d\mu < +\infty$.
Alors $f \in L^1(X)$.

Application 31 : Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$ de dérivée bornée. Alors $\int_0^1 f'(x)\, dx = f(1) - f(0)$.

Théorème 32 (Convergence dominée)
Soit (f_n) une suite de fonctions ~~de~~ $L^1(X)$.
On suppose que
1. (f_n) converge simplement, μ-p.p vers f.
2. Il existe une fonction $g \in L^1(X)$ telle que $|f| \leq g$ μ-p.p.

Alors $f \in L^1(X)$ et $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$.

Exemple 33 : Soit (f_n) une suite de fonctions continues $[0,1] \to [0,1]$ qui converge simplement vers 0. Alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$.

Théorème 34 : Continuité sous le signe intégrale. Soit $f : E \times X \to \mathbb{C}$ ((E, d) espace métrique)
On suppose que :
1) Pour tout $u \in E$, $x \mapsto f(u, x)$ est mesurable
2) Pour presque tout $x \in X$, pour tout $u_0 \in E$, $u \longmapsto f(u, x)$ est continue en u_0.
3) Il existe $g \in L^1(X)$ positive telle que $\forall u \in E$, $|f(u,x)| \leq g(x)$ μ-p.p.

Alors la fonction $F : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{C} \\ u \longmapsto \int_X f(u,x)\, d\mu(x) \end{array}$ est continue sur E

3. Espaces L^p.

Définition 35 : Pour $p \in [1, +\infty[$. On définit l'espace $L^p(X)$ par
$L^p(X) = \{ f \text{ mesurable}, \int_X |f|^p d\mu < \infty \} / \sim$ $+ \|f\|_p$
et $L^\infty(X) = \{ f \text{ mesurable et il existe } M \geq 0 \text{ tel que } |f| \leq M \ \mu\text{-pp} \} / \sim$.

Notation 36 : On notera $L^p = L^p(X)$.

Proposition 37 (Inégalité de Hölder) : Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit q son exposant conjugué. Alors $\forall (f,g) \in L^p \times L^q$, $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Proposition 38 (Inégalité de Minkowski) : Soit $p \in [1, +\infty]$.
$\forall (f,g) \in (L^p)^2$, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Corollaire 39 : $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur L^p.

Théorème 40 : (Riesz - Fischer) Soit $p \in [1, \infty]$. $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

III. Espace de Bergman

1. Rappel sur les fonctions holomorphes

Définition 41 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-dérivable en un point $a \in \Omega$ si la limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe. Dans ce cas, on la note $f'(a)$. f est holomorphe sur Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω. On note $H(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω.

Définition 42 : On dit qu'une fonction f est analytique sur Ω si elle est développable en série entière au voisinage de tout point $a \in \Omega$.

Théorème 43 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction. f est holomorphe si et seulement si elle est analytique

2. Espace de Bergman.

Définition 44 : On définit l'espace de Bergman $\mathcal{H}^2(\Omega)$ d'un ouvert Ω par $\mathcal{H}^2(\Omega) = L^2(\Omega) \cap H(\Omega)$ que l'on munit de la norme induite par $L^2(\Omega)$ et du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f \bar{g} \, d\lambda$.

DEV 2

Proposition 45 : $\mathcal{H}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 46 : On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$. Alors $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}^2(D(0,1))$

Références

- Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani
- Cours d'analyse fonctionnelle, Li
- Théorie de l'intégration, Briane - Pagès