207

Prolongement de fonctions. Exemples et applications

Définition 1 : Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, $D\subset E$. On dit que $g : E\to F$ est un prolongement de $f : D\longrightarrow F$ si $g_{|D}=f$.

I. Fonctions d'une variable réelle

I intervalle de $\mathbb{R}$

1) Prolongement par continuité

Définition 2 : Soient $a\in I$ et $f : I\setminus\{a\}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie sur $I\setminus\{a\}$. $g : I\longrightarrow\mathbb{R}$ est un prolongement de f par continuité ~~en a~~ si g est continue sur I et $g_{|I\setminus\{a\}}=f$. On note $\tilde{f}$ ou f abusivement cette fonction. [REH]

Théorème 3 : Soient $a\in I$ et $f : I\setminus\{a\}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue sur $I\setminus\{a\}$ et admettant une limite $l\in\mathbb{R}$ quand $x\to a$. Alors il existe un (unique) prolongement par continuité en a sur I. Cette fonction est définie par

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq a\\ l & \text{si } x=a.\end{cases}$$

Exemple 4 :

1) $f : x\longmapsto \frac{\sin x}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en posant $f(0)=0$.

2) $x\longmapsto\frac{|x|}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0

Application 5 : L'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ converge.

2) Prolongement C^k

Définition 6 : Soient $a\in I$ et $f : I\setminus\{a\}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction définie sur $I\setminus\{a\}$. f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ ($k\in\overline{\mathbb{N}}$) en a s'il existe une fonction $g : I\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I telle que $g_{|I\setminus\{a\}}=f$.

Théorème 7 : Soient $a\in I$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I\setminus\{a\}$. Si pour tout $i\in[\![0,k]\!]$, $f^{(i)}(x)$ admet une limite finie lorsque $x\to a$, alors f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. [REH]

Exemple 8 :

1) $x\longmapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en 0 mais n'admet pas de prolongement $\mathcal{C}^1$.

2) $x\longmapsto\begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$ admet un prolongement $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3) Application aux fonctions plateau

Proposition 9 : Il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in[-1,1]$, $\varphi(x)=1$ et $\forall x\in\mathbb{R}, |x|\geq 2$ $\varphi(x)=0$. [Gou]

Méthode 10 : On considère $f : x\longmapsto\begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. [Gou]
On pose $g(x)=f(1-x)f(1+x)$
g est continue (même $\mathcal{C}^\infty$) à support compact donc intégrable
Alors $h : x\longmapsto\frac{1}{K}\int_{-\infty}^{x}g(t)\,dt$ est $\mathcal{C}^\infty$ vérifie $h(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leq -1\\ 1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$
Alors $\varphi : x\longmapsto h(2x+3)h(-2x+3)$ convient

Corollaire 11 : Pour tout segment $[a,b]$, il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in[a,b]$, $\varphi(x)=1$ et $\forall x\in\mathbb{R}\setminus[a,b]$, $\varphi(x)=0$.

Remarque 12 : Ces fonctions sont très utiles pour construire des approximations de l'unité et dans le cadre des distributions

II. Fonctions d'une variable complexe

1) Séries entières

Définition 13 : On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où z est une variable complexe et (a_n) une suite complexe [Gou]

Proposition 14 : (Lemme d'Abel) : Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0\in\mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors
(i) Si $|z|<|z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument
(ii) Pour tout $r\in]0,|z_0|[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\bar{D}(0,r)$.

Définition 15 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre $R=\sup\{r\geq 0,\ (|a_n|r^n) \text{ bornée}\}$ s'appelle le rayon de convergence
- pour $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<R$ $\sum a_n z^n$ converge absolument
- pour $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>R$ $\sum a_n z^n$ diverge.

Remarque 16 : A priori, on ne sait pas ce qui se passe pour $|z|=R$.

Théorème 17 (Abel angulaire) : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R\geq 1$ et de somme f. Soit $\theta_0\in[0,\frac{\pi}{2}[$. On lui associe le domaine

$$\Delta_{\theta_0}=\{1-\rho\exp(i\theta),\ \theta\in[-\theta_0,\theta_0],\ \rho\in\mathbb{R}_+^*\}\cap D(0,1).$$

Si $\sum a_n$ converge, $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$

Application 18 : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Théorème 19 (Taubérien faible) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R=1$. On note f sa somme sur le disque. On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = S$.

Si $a_n = o(\frac{1}{n})$, alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

2) Prolongement analytique

[Amp][Tau]

Définition 20 : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est analytique sur Ω si, pour tout $a \in \Omega$, il existe $\delta > 0$ et une série entière $\sum c_n(a) z^n$ de rayon $R \geq \delta$ tels que $|z-a| < \delta$ implique $z \in \Omega$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(a)(z-a)^n$.

On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω.

Théorème 21 (Principe des zéros isolés) : Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ non identiquement nulle. L'ensemble des zéros de f est une partie localement finie de Ω.

Application 22 : Soit Ω un ouvert connexe contenant 0. Il n'existe pas de fonction analytique f vérifiant

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ assez grand.}$$

Théorème 23 : Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point, alors $f = g$.

[LH]

Définition 24 : Une fonction locale est un couple (f, D) où D est un disque ouvert non vide et $f \in H(D)$.

Définition 25 : Soient (f, D) une fonction locale et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ une courbe. Un prolongement analytique de (f, D) le long de γ est une famille de fonctions locales $(f_t, D_t)_{t \in [0,1]}$ telle que

a) $(f_0, D_0) = (f, D)$

b) Pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t)$ est le centre de D_t.

c) Pour tout $t \in [0,1]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t' \in [0,1]$ vérifiant $|t - t'| < \varepsilon$, $\gamma(t') \in D_t \cap D_{t'}$ et $f_t = f_{t'}$ sur cette intersection.

Théorème 24 : Soient (f, D) une fonction locale et γ un chemin tel que $\gamma(0)$ soit le centre de D. Si (f_1, D_1) et $(\tilde{f}_1, \tilde{D}_1)$ sont les éléments terminaux de deux prolongements analytiques de (f, D) le long de γ, alors $f_1 = \tilde{f}_1$ sur $D_1 \cap \tilde{D}_1$.

3) Fonction Gamma d'Euler

Proposition-définition 25 : Pour tout $x > 0$, on pose
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$
Γ ainsi définie est appelée fonction Gamma d'Euler.

Proposition 26 : La fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème 27 : La fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

III Prolongement par densité

[Gou]

Théorème 28 Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, A une partie de E dense dans E.

1) Si f est une application continue de (A, d) vers (F, δ) et si pour tout $x \in E \setminus A$ $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y)$ existe, alors il existe une unique fonction $g : E \to F$ continue telle que $g_{|A} = f$.

2) Si (F, δ) est complet et f uniformément continue, il existe un prolongement de f uniformément continue.

Application 29 : L'application déterminant $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est différentiable et $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), d\det(X).H = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}X\, H)$

On donne quelques applications du théorème.

1) Analyse réelle

Proposition 30 : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 31 : Toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$ est linéaire, (ie il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$)

Proposition 32 : Tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit monogène soit dense dans $\mathbb{R}$

Proposition 33 : Soient T_1 et T_2 des réels tels que $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors toute fonction continue à la fois T_1-périodique et T_2-périodique est constante

2) Fonctions Lebesgue intégrables

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré

Définition 34 : Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction étagée positive. L'intégrale de f par rapport à la mesure μ est définie par

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(\{f = \alpha_i\})$$

Lemme 35 (Approximation) : Toute fonction mesurable positive est limite croissante d'une suite de fonctions étagées positives

Définition 36 : Soit f une fonction mesurable positive. On définit l'intégrale de f sur X par rapport à la mesure μ par

$$\int_X f \, d\mu = \sup\left\{ \int_X \varphi \, d\mu, \ \varphi \leq f, \ \varphi \text{ étagée positive} \right\}$$

On dit que f est μ-intégrable si $\int_X f \, d\mu < +\infty$.

Théorème (Transfert) : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle et soit f une fonction borélienne telle que $\mathbb{E}[|f(X)|] = \int_\Omega |f(X)| \, d\mathbb{P} < +\infty$.
Alors $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\mathbb{P}_X(x)$.

Théorème 38 (Weierstrass trigonométrique) : L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'ensemble des fonctions continues

Théorème 39 (Convergence dominée) : Soit (f_n) une suite de fonctions telles que $\int |f_n| \, d\mu < +\infty$.
On suppose que
1) (f_n) converge simplement μ-pp vers f
2) Il existe une fonction g telle que $\int g \, d\mu < +\infty$ et $|f| \leq g$ μ-p.p

Alors $\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

Application 40 : Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $[0,1]$. Alors, si $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}[e^{i2\pi m X}] = \mathbb{E}[e^{i2\pi m Y}]$, alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

Références

[Gou] Analyse, Gourdon
[LM] 131 développements
[Que] Analyse complexe, Queffélec
[Tau] Analyse complexe pour la licence 3, Tauvel
[REH] MPSI, Mathématiques, Radi, El Hami