208. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

I. Espaces vectoriels normés

1. Définitions

Définition 1 (Norme)**.** [Amr19] Une norme sur E est une application $E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, généralement notée $\|\cdot\|$, vérifiant, pour tous $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\|x\| = 0 \implies x = 0_E$ (séparation),
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogénéité),
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

E muni de la norme $\|\cdot\|$ est appelé espace vectoriel normé.

Proposition 2. Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), (E_2, \|\cdot\|_{E_2}), \dots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$ des evn. Alors $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est un espace vectoriel, et $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \|x_k\|_{E_k}$$

en est une norme.

On considérera dans la suite l'espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Définition 3 (Distance associée à une norme)**.** [Has11] On pose, pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) = \|x - y\|$. d est une distance : c'est la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

Remarque 4. E est en particulier un espace métrique.

2. Exemples usuels

Exemple 5.

- $E = \mathbb{K}^n$, $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$, $\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$,
- $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f|$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}$, $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f| = \max_{[a,b]} |f|$.
- Soit $(\cdot,\cdot)$ un produit scalaire sur E. $x \longmapsto (x,x)$ définit le carré d'une norme.

Espaces L^p

Soit $\|\cdot\|_p$ l'application définie par $\forall f \in L^p,\ \|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$.

Théorème 6 (Inégalité de Hölder)**.** [Has11] Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Alors $fg \in L^1$, et

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Corollaire 7 (Inégalité de Minkowski)**.** Pour tous $f, g \in L^p$, $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Corollaire 8. $\|\cdot\|_p$ est une norme sur L^p.

3. Les boules

Définition 9 (Boule)**.** [Amr19] Soient $a \in E$ et $r > 0$. On appelle boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r l'ensemble noté $B(a,r)$ (resp.$\overline{B}(a,r)$) défini par

$$B(a,r) = \{x \in E,\ \|x - a\| < r\}\ (\text{resp.}\overline{B}(a,r) = \{x \in E,\ \|x - a\| \leqslant r\}).$$

Proposition 10. Soient $a \in E$ et $r > 0$. $B(a,r)$ et $\overline{B}(a,r)$ sont convexes.

Proposition 11. Soient $a \in E$ et $r > 0$. Alors $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$.

Remarque 12. Ce n'est pas vrai dans un espace métrique quelconque !

Exemple 13. X espace muni de $d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

4. Normes équivalentes

Définition 14 (Normes équivalentes)**.** [Amr19] Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur E. On dit que $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|'$ s'il existe λ et μ dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall x \in E,\ \lambda\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \mu\|x\|.$$

Proposition 15. Si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont des normes équivalentes, alors toute suite convergente pour l'une est convergente pour l'autre et les limites sont égales.

Exemple 16. Si $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Remarque 17. Les normes équivalentes définissent les mêmes ouverts, donc la même topologie.

5. Complétude

Définition 18 (Espace de Banach)**.** [Has11] E est complet si toute suite de Cauchy est convergente. Dans ce cas, (E,d) où d est la distance associée à la norme, est un espace de Banach.

Proposition 19. Un evn $(E,\|\cdot\|)$ est un espace de Banach si, et seulement si toute série absolument convergente pour la norme $\|\cdot\|$ est convergente.

Exemple 20 (Riesz-Fischer)**.** [Li13]**[DÉV]** Pour tout $p \in [1,+\infty]$, $L^p(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Exemple 21. $(\mathcal{C}(K),\|\cdot\|_\infty)$ pour K compact et $(\mathbb{R},|\cdot|)$ sont des espaces de Banach.

II. Applications linéaires continues

1. Généralités

Théorème 22 (Caractérisation des applications linéaires continues)**.** [Dan16] Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ des evn. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$.
2. u est lipschitzienne sur E.
3. u est continue sur E.
4. u est continue en 0_E.
5. u est bornée sur $\overline{B}(0_E,1)$.
6. u est bornée sur $S(0_E,1)$.

On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

Remarque 23. La continuité dépend sauvagement de la norme choisie en général.

Exemple 24. [Dan16]

— $\delta_0 : \begin{array}{ccc} L^1([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$ est une forme linéaire continue pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

— $T : \begin{array}{ccc} (\mathcal{C}^1([0,1],\|\cdot\|) & \longrightarrow & (\mathcal{C}([0,1]),\|\cdot\|_\infty) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ où $\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1])$, $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est une application linéaire continue.

Théorème-Définition 25 (Norme subordonnée)**.** [Dan16] Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

$$\sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E\leqslant 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty.$$

On définit ainsi une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ notée $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c}$ par

$$\forall f \in \mathcal{L}_c(E,F),\ \|f\|_{\mathcal{L}_c} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

$\mathcal{L}_c(E,F)$ est la norme subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Remarque 26. S'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E,$$

alors f est continue, et $\|f\|_{\mathcal{L}_c} \leqslant M$.

Exemple 27. $T : \begin{array}{ccc} \ell^p(\mathbb{N}^*) & \longrightarrow & \ell^p(\mathbb{N}^*) \\ (x_1, x_2, \dots) & \longmapsto & (x_2, x_3, \dots) \end{array}$ est un endomorphisme continue sur $\ell^p(\mathbb{N}^*)$, et $\|T\|_{\mathcal{L}_c} = 1$.

Proposition 28. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\|u \circ v\| \leqslant \|u\|\|v\|$.

Théorème 29 (Inégalité de Hardy)**.** [Li13]**[DÉV]** Soit $p \in]1, +\infty[$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, on pose

$$T_f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

Alors, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, $T_f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, et

$$\|T_f\|_{L^p} \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_{L^p}.$$

Proposition 30. [Dan16] Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Banach.

2. Forme linéaire continue

Définition 31. [Has11] On appelle hyperplan tout sous-espace vectoriel de E de codimension 1.

Lemme 32. [Has11]

1. Soit H un hyperplan de E. Alors, il existe une forme linéaire non nulle f de E telle que $H = \ker(f)$.
2. Si f est une forme linéaire, alors $H = \ker(f)$ est un hyperplan.
3. Soient f et g deux formes linéaires. Alors $\ker(f) = \ker(g)$ si, et seulement s'il existe $\lambda \neq 0 \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda g$.

Proposition 33. [Has11] Soit E un evn.

1. Tout hyperplan de E est soit fermé soit dense dans E.
2. Une forme linaire sur E est continue si, et seulement si son noyau est fermé dans E.

III. Les evn de dimension finie

On suppose dans cette partie que E est un evn de dimension finie n

Théorème 34 (Équivalence des normes)**.** [Dan16] Toutes les normes définies sur E sont équivalentes.

Corollaire 35. Toute application linéaire est continue.

Exemple 36. $E = F = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\|A\|_{\mathcal{L}_c} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |a_{i,j}|$ est la norme subordonnée associée à $\|\cdot\|_\infty$.
- $\|A\|_{\mathcal{L}_c} = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{i,j}|$ est la norme subordonnée associée à $\|\cdot\|_1$.

Théorème 37 (Bolzano-Weierstrass)**.** Toute suite bornée de E admet au moins une valeur d'adhérence.

Proposition 38. Les compacts de E sont exactement les parties fermées et bornées de E.

Corollaire 39.

1. E est un evn complet.
2. Tout sous-espace vectoriel de E est fermé dans E.

Théorème 40 (de Riesz)**.** [QZ20] E est de dimension finie si, et seulement si $\overline{B}(0, 1)$ est compact.

Théorème 41. Un espace vectoriel de dimension finie est fermé.

Application 42. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\exp(C)$ est un polynôme en C.

Développements

1. Théorème de Riesz-Fischer
2. Inégalité de Hardy

Références

[Has11] Nawal El Hage Hassan. *Topologie générale et espaces normés*. Dunod, 2011. ISBN : 978-2-10-056725-6.

[Li13] Daniel Li. *Cours d'analyse fonctionnelle*. Ellipses, 2013.

[Dan16] Jean-François Dantzer. *Mathématiques pour l'agrégation, Analyse et probabilités*. Vuibert, 2016.

[Amr19] Mohammed El Amrani. *Calcul différentiel*. Ellipses, 2019.

[QZ20] Hervé Queffélec et Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation (5e édition)*. Dunod, 2020.