Suites de polygones

Leçons : 149, 181, 226

Référence : Gourdon, Algèbre 3e ed. p 190 + Pecatte ?

Lemme : Toute matrice circulante $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable avec pour valeurs propres $P(1), \dots, P(\omega^{n-1})$ où $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} X^i$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Dém : Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & 0 & 1 & \\ 0 & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$,

J est la matrice de l'endomorphisme f défini par $\begin{cases} f(e_1) = e_n \\ f(e_i) = e_{i-1} & \forall i \geq 1 \end{cases}$.

Ainsi, si $1 \leq p \leq n-1$, J^p est la matrice de l'endomorphisme qui envoie e_i sur e_{i-p} si $i > p$ et e_i sur e_{i+n-p} si $i \leq p$, autrement dit

$$\forall 1 \leq p \leq n-1, \quad J^p = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$$

Par liberté de la famille $(J, \dots, J^{n-1})$, aucun polynôme $\neq 0$ de degré $< n$ ne peut annuler J donc $\deg \mu_J \geq n$ d'où $\deg \mu_J = n$.
Un simple calcul montre que $J^n = I_n$ donc $\mu_J = X^n - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc J est diagonalisable, de valeurs propres les racines n-ième de l'unité. Il existe donc $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que, avec $\omega = e^{2i\pi/n}$,

$$J = Q \operatorname{Diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1}) Q^{-1}.$$

Par ailleurs, un simple calcul montre que $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} J^i = A = P(J)$.

Donc $A = P(J) = P(Q \operatorname{Diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1}) Q^{-1}) = Q \operatorname{Diag}(P(1), \dots, P(\omega^{n-1})) Q^{-1}$.

Prop : Soit $P_0 = (P_{0,i})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$ un polygone. On définit (P_k) la suite de polygones par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq i \leq n, \quad P_{k+1,i} = \begin{cases} \dfrac{P_{k,i} + P_{k,i+1}}{2} & \text{si } i < n \\ \dfrac{P_{k,1} + P_{k,n}}{2} & \text{si } i = n \end{cases}.$$

Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P_0 i.e toutes les composantes de (P_k) convergent vers $g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{0,i}$.

$\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Dém: La relation de récurrence se traduit par $P_{k+1} = AP_k$ avec $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

ou encore, par récurrence immédiate, $P_k = A^k P_0$.

A étant une matrice circulante, le lemme montre que ses valeurs propres sont les $P(\omega^k)$ où $P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}X$. On voit en outre que les $P(\omega^k)$ sont toutes distinctes donc A est diagonalisable : il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \text{Diag}(P(1), \dots, P(\omega^{n-1}))$.

On a alors $A^k = QD^kQ^{-1}$ et comme $P(\omega), \dots, P(\omega^{n-1})$ sont de module < 1, par continuité de la conjugaison, $A^k \xrightarrow[k \to \infty]{} \underbrace{Q\,\text{Diag}(1, 0, \dots, 0)\,Q^{-1}}_{= B}$

Donc $P_k \xrightarrow[k \to \infty]{} BP_0$ et $P_{k+1} = AP_k \xrightarrow[k \to \infty]{} ABP_0$ i.e $BP_0 = ABP_0$

(P_k) converge donc dans $\mathbb{C}^n$ vers un point fixe de $X \longmapsto AX$, c'est-à-dire vers un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

On voit rapidement que $\text{Ker}(A - I_n) = \text{Vect}(1, \dots, 1)$ donc il existe $g \in \mathbb{C}$ tel que $P_k \xrightarrow[k \to \infty]{} (g, \dots, g)$

On remarque que l'isobarycentre est préservé par multiplication par A :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{k+1,i} = \frac{1}{n}\left(\frac{P_{k,n} + P_{k,1}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{P_{k,i} + P_{k,i+1}}{2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{k,i}$$

donc par continuité de $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et passage à la limite,

on a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{0,i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g = g$: c'est bien l'isobarycentre de P_0.