Solution élémentaire de l'équation de Schrödinger.

Leçons : 222, 235, 250, 239

Références : Bony p 187-189 + 150, Zuily (distrib) p 115 + p 108-109 + Adrien L.

Théorème : L'équation de Schrödinger possède une solution élémentaire tempérée à support dans $\{t \geq 0\}$, il s'agit de la distribution E donnée par :

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \ \langle E, \varphi \rangle = e^{-\frac{in\pi}{4}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i\|x\|^2}{4t}} \varphi(t,x) \, dx \, dt$$

Analyse : Si E est solution $\partial_t E - i\Delta_x E = \delta_0$, on applique la transformée de Fourier partielle à cette équation pour obtenir :

$$\partial_t \tilde{E} + i\|x\|^2 \tilde{E} = \tilde{\delta_0}.$$

Explicitons $\tilde{\delta_0}$: $\langle \tilde{\delta_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \tilde{\varphi} \rangle = \tilde{\varphi}(0,0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0,x) \, dx$

On est donc tenté de poser $E = \tilde{F}^{-1}\left(H(t) e^{-it\|x\|^2}\right)$ pour obtenir le dirac avec H en dérivant avec la formule des sauts, tandis que l'exponentielle vérifiera l'équation.

Synthèse : On pose $E = \tilde{F}^{-1}\left(H(t) e^{-it\|x\|^2}\right)$, soit $\varphi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t E - i\Delta_x E, \tilde{\varphi} \rangle &= \langle \partial_t \tilde{E} + i\|x\|^2 \tilde{E}, \varphi \rangle \\
&= \langle \tilde{E}, -\partial_t \varphi + i\|x\|^2 \varphi \rangle \\
&= \langle H(t) e^{-it\|x\|^2}, -\partial_t \varphi + i\|x\|^2 \varphi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-it\|x\|^2} \left(-\partial_t \varphi(t,x) + i\|x\|^2 \varphi(t,x)\right) dt \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[-e^{-it\|x\|^2} \varphi(t,x) \right]_{t=0}^{+\infty} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0,x) \, dx
\end{aligned}$$

Donc $\langle \partial_t E - i\Delta_x E, \tilde{\varphi} \rangle = \langle \delta_0, \tilde{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$

et comme la transformée de Fourier partielle est une bijection sur $S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, on a bien $\partial_t E - i\Delta_x E = \delta_0$

Il s'agit désormais d'expliciter la distribution E.

En appliquant encore la transformée de Fourier, on a

$$\check{E} = \frac{1}{(2\pi)^n} H(t)\, \hat{\mathcal{F}}\left(e^{-it\|\xi\|^2}\right)$$

On a donc besoin du lemme suivant.

Lemme : $\forall t>0, \quad \hat{\mathcal{F}}\left(e^{-it\|\xi\|^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n e^{i\frac{\|x\|^2}{4t}}$

Le cas échéant, $\check{E} = \frac{1}{(2\pi)^n} H(t) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n e^{i\frac{\|x\|^2}{4t}}$

Pour $\varphi \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned}\langle E, \varphi \rangle = \langle \check{E}, \check{\varphi} \rangle &= e^{-i\frac{n\pi}{4}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{\|x\|^2}{4t}} \varphi(t,-x)\, dx\, dt \\ &= e^{-i\frac{n\pi}{4}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{\|x\|^2}{4t}} \varphi(t,x)\, dx\, dt \\ &= \langle \check{E}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

Donc $E = \check{E} = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-i\frac{n\pi}{4}} e^{i\frac{\|x\|^2}{4t}}$

Démo lemme : Soit $t>0$, la transformée de Fourier de $T = e^{-it\|\xi\|^2}$ est bien définie car c'est une fonction de L^∞ donc est dans S'.

Néanmoins, comme elle n'est pas dans S, on ne peut pas calculer simplement sa transformée de Fourier.

On va se placer dans $S(\mathbb{R}^n)$ et $S'(\mathbb{R}^n)$.

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $T_\varepsilon = e^{-\varepsilon \|\xi\|^2} e^{-it\|\xi\|^2} \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Si $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, par convergence dominée, on a :

$$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon\|\xi\|^2} e^{-it\|\xi\|^2} \varphi(\xi)\, d\xi \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it\|\xi\|^2} \varphi(\xi)\, d\xi$$

$$= \langle T, \varphi \rangle$$

autrement dit $T_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{S'(\mathbb{R}^n)} T$.

Comme la transformée de Fourier est continue, on a donc $\hat{F}T_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{S'(\mathbb{R}^n)} \hat{F}T$.

Mais $T_\varepsilon \in S(\mathbb{R}^n)$ et la transformée de Fourier sur $S'(\mathbb{R}^n)$ n'est qu'un prolongement de celle de $S(\mathbb{R}^n)$. On en déduit :

$$\hat{F}T_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon\|\xi\|^2} e^{-it\|\xi\|^2} e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\xi$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\varepsilon+it)\xi_j^2} e^{-ix_j\xi_j} d\xi_j$$

On sait que si $z \in]0, +\infty[$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-z\xi_j^2} e^{-ix_j\xi_j} d\xi_j = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}} e^{-\frac{x_j^2}{4z}}$

D'après le théorème d'holomorphie sous le signe $\int$, la fonction $z \longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-zy^2} e^{-ix_jy} dy$ se prolonge au demi-plan $\{Re(s) > 0\}$ de façon holomorphe.

De même, $z \longmapsto \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}} e^{-\frac{x_j^2}{4z}}$ se prolonge de manière holomorphe à $\{Re(s) > 0\}$ en utilisant une détermination du logarithme convenable.

D'après le principe du prolongement analytique, comme elles coïncident sur l'axe $]0, +\infty[$, on a encore

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(\varepsilon+it)y^2} e^{-ix_jy} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon+it}} e^{-\frac{x_j^2}{4(\varepsilon+it)}}$$

Et enfin, il vient $\hat{F}T_\varepsilon = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon+it}}\right)^n e^{-\frac{\|x\|^2}{4(\varepsilon+it)}}$

$\sqrt{\varepsilon+it} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{t}$. D'autre part, $e^{-\frac{\|x\|^2}{4(\varepsilon+it)}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} e^{i\frac{\|x\|^2}{4t}}$ par convergence dominée.

On a donc bien le résultat $\hat{F}T = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n e^{i\frac{\|x\|^2}{4t}}$. $\square$