Théorème de réarrangement de Riemann.

Leçons : 223, 230

Référence : FGN Analyse 1, exo 3.48 p 217

Théorème : Soit $\sum a_n$ une série réelle semi-convergente et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors il existe une permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la série $\sum a_{\sigma(n)}$ converge de somme α

Dém : ① On partitionne $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N} = E^+ \sqcup E^-$ où $\begin{cases} E^+ = \{n \geq 0 : a_n \geq 0\}. \\ E^- = \{n \geq 0 : a_n < 0\} \end{cases}$

Supposons par l'absurde que $\mathrm{Card}(E^-) < \infty$. Alors la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est à termes positifs à partir d'un certain rang si bien que la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ équivaut à sa convergence absolue. Ceci contredit la semi-convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n$. Ainsi $\mathrm{Card}(E^-) = \infty$ et de même, $\mathrm{Card}(E^+) = \infty$.

② Pour $n \geq 0$, on a $\max(0, a_n) = \dfrac{a_n + |a_n|}{2}$ et $\min(0, a_n) = \dfrac{a_n - |a_n|}{2}$

Par conséquent, les séries $\sum_{n \in E^+} a_n = \sum_{n \geq 0} \max(0, a_n)$ et $\sum_{n \in E^-} a_n = \sum_{n \geq 0} \min(0, a_n)$ divergent.

③ On construit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ par récurrence. Posons $\sigma(0) = 0$ et pour $n \geq 1$,

- si $\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} \leq \alpha$, on ajoute un terme positif : on prend pour $\sigma(n)$ le plus petit des entiers k de E^+ distincts de $\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)$ i.e $\sigma(n) = \min E^+ \setminus (E^+ \cap \{\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)\})$
- si $\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} > \alpha$, on ajoute un terme négatif : on prend pour $\sigma(n)$ le plus petit entier de E^- distinct de $\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)$ i.e $\sigma(n) = \min E^- \setminus (E^- \cap \{\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)\})$

Ainsi construite, σ est injective.

④ Montrons que σ est surjective. Par l'absurde, supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ avec $N \notin \sigma(\mathbb{N})$. On peut supposer sans perte de généralité que $N \in E^+$. Par construction de σ, tous les éléments de $E^+ \cap \sigma(\mathbb{N})$ sont strictement inférieurs à N, ils sont donc en nombre fini. Il existe donc un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel $\forall n \geq n_0$, $\sigma(n) \in E^-$. Par conséquent, dès que $n \geq n_0$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} > \alpha$.

Comme $\sum a_{\sigma(n)}$ est à termes négatifs (sauf un nombre fini d'entre eux) et que ses sommes partielles sont minorées à partir d'un certain rang, elle converge. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to E^-$ une application bijective strictement croissante (par exemple $\varphi(0) = \min E^-$ et $\varphi(n) = \min E^- \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}$)
Les séries $\sum a_{\sigma(n)}$ et $\sum a_{\varphi(n)}$ diffèrent d'un nombre fini de termes (ceux qui sont positifs) donc sont de même nature.
Mais les sommes partielles de $\sum a_{\varphi(n)}$ sont majorées par celles de $\sum \min(0, a_n)$ qui divergent vers $-\infty$ d'après 2 donc la série $\sum a_{\varphi(n)}$ est divergente et $\sum a_{\sigma(n)}$ aussi : une contradiction.
Le même raisonnement s'applique si $N \in E^-$. Ainsi σ est surjective donc bijective.

5 Montrons que $\sum_{n \geq 0} a_{\sigma(n)}$ converge et que sa somme vaut α.

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\sum a_n$ converge, on a $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_1$, $|a_n| < \varepsilon$. Par injectivité de σ, $\{k \in \mathbb{N} : \sigma(k) \leq n_1\}$ est fini : on pose $n_0 = \max\{k \in \mathbb{N} : \sigma(k) \leq n_1\}$ de sorte que si $n > n_0$, alors $\sigma(n) > n_1$ donc $|a_{\sigma(n)}| < \varepsilon$. Bref $a_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

On sait qu'il existe $N \geq n_0$ tel que $\sigma(N) \in E^+$ et $\sigma(N+1) \in E^-$ car les $\sigma(n)$ ne peuvent rester dans E^+ ou dans E^-.
Pour $n \geq 0$ on pose la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$ et on va montrer que $\forall n \geq N$, $|S_n - \alpha| \leq \varepsilon$.
Comme $\sigma(N) \in E^+$, c'est qu'on a $S_{N-1} \leq \alpha$ et comme $\sigma(N+1) \in E^-$, c'est qu'on a $S_N > \alpha$. Or $|S_N - S_{N-1}| = |a_{\sigma(N)}| < \varepsilon$ donc $\alpha < S_N \leq S_{N-1} + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon$ donc $|S_N - \alpha| \leq \varepsilon$.

Soit désormais $n > N$. Supposons par l'absurde que $S_n > \alpha + \varepsilon$.

Comme on passe de S_{n-1} à S_n par un saut de longueur $|a_{\sigma(n)}| < \varepsilon$, on ne peut avoir $S_{n-1} \leq \alpha$. Donc $S_{n-1} > \alpha$ donc nécessairement $a_{\sigma(n)} < 0$ d'où $S_n \leq S_{n-1}$. Mais alors de proche en proche, on obtient :

$$\alpha + \varepsilon < S_n \leq S_{n-1} \leq S_{n-2} \leq \dots \leq S_N \quad : \text{ une contradiction.}$$

Ainsi $\forall n > N,\ S_n \leq \alpha + \varepsilon$.

Le même raisonnement avec $\alpha - \varepsilon$ montre que $\forall n > N,\ S_n \geq \alpha - \varepsilon$.

Bref, $\forall n > N,\ |S_n - \alpha| \leq \varepsilon$ donc (S_n) converge vers α i.e $\sum a_{\sigma(n)}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha$.

$\square$