Méthode de Newton.

Leçons : 223, 226, 228

Référence : Rouvière p 152, éventuellement | Demailly p 100 | Schatzman, Analyse numérique... p 341.

Théorème : Soient $a<b$ des réels, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, $\ell \in [a,b]$ tel que $f(\ell)=0$ et $f'(\ell)\neq 0$. Alors il existe $\varepsilon>0$ tel que toute suite définie par
$$\begin{cases} x_0 \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon] \\ \forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$
soit bien définie et converge quadratiquement vers ℓ.

Dém : Par continuité de f', il existe $\delta>0$ tel que $\forall |x-\ell|\leq\delta$, $f'(x)\neq 0$.

On pose alors $m = \inf_{[\ell-\delta,\ell+\delta]} |f'|>0$ et $M = 1+\sup_{[\ell-\delta,\ell+\delta]} |f''| \in]0,+\infty[$.

On pose $\eta = \frac{m}{M}>0$ et on choisit $\varepsilon = \min(\eta,\delta)>0$

Par hypothèse, $x_0\in[\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon]$ est bien défini.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie jusqu'au terme n et que $x_n \in [\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon]$.

Comme a fortiori $x_n\in[\ell-\delta,\ell+\delta]$, on a $f'(x_n)\neq 0$ donc le terme x_{n+1} est bien défini et on a :

$$x_{n+1}-\ell = x_n-\ell-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{f'(x_n)}\left(f(\ell)-f(x_n)-f'(x_n)(\ell-x_n)\right)$$

Comme f est C^2, la formule de Taylor à l'ordre 2 assure l'existence de z_n entre (strictement) ℓ et x_n tel que
$$f(\ell) = f(x_n)+f'(x_n)(\ell-x_n)+\frac{f''(z_n)}{2}(\ell-x_n)^2.$$

On a alors $x_{n+1}-\ell = \dfrac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(x_n-\ell)^2$.

Par conséquent,
$$\begin{aligned}|x_{n+1}-\ell| = \frac{|f''(z_n)|}{2|f'(x_n)|}|x_n-\ell|^2 &\leq \frac{M}{2m}\varepsilon|x_n-\ell| \quad \text{car } \varepsilon\leq\eta \text{ et } \frac{M}{m}=\frac{1}{\eta}\\ &\leq \frac{1}{2}|x_n-\ell| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie jusqu'au rang $n+1$ et $x_{n+1} \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$.
Par récurrence, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Par ailleurs, on a montré que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|x_{n+1}-\ell| \leq \frac{1}{2}|x_n-\ell|$ donc par récurrence $|x_n-\ell| \leq \frac{1}{2^n}|x_0-\ell|$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire. D'après ce qui précède,

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \frac{x_{n+1}-\ell}{(x_n-\ell)^2} = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}$$

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, z_n est entre ℓ et x_n, par encadrement la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
Par continuité de f' et f'', on obtient donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\ell}{(x_n-\ell)^2} = \frac{f''(\ell)}{2f'(\ell)}$$

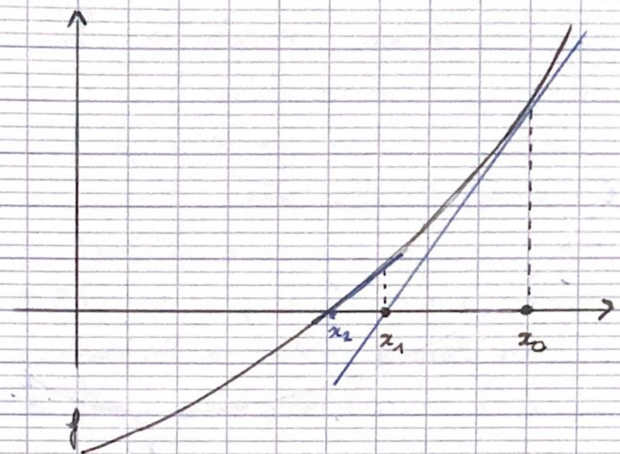
- Si $f''(\ell) \neq 0$, on a en outre $x_{n+1}-\ell \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{f''(\ell)}{2f'(\ell)}(x_n-\ell)^2$.

convergence + rapide ici...

- Si $f''(\ell) = 0$, on a $x_{n+1}-\ell \underset{n\to\infty}{=} o((x_n-\ell)^2)$.

Dans les deux cas, $x_{n+1}-\ell \underset{n\to\infty}{=} O((x_n-\ell)^2)$ i.e la convergence est (au moins) quadratique.
En effet, on a alors $|x_{n+1}-\ell| \leq C|x_n-\ell|^2$ et on a par récurrence $C|x_n-\ell| \leq (C|x_0-\ell|)^{2^n} \leq (C\varepsilon)^{2^n}$. Quitte à diminuer encore ε on peut supposer que $C\varepsilon < 1$ et donc la convergence de (x_n) vers ℓ est bien d'ordre 2.

Bornes / Heuristique



Pour résoudre $f(x)=0$ on cherche à transformer l'équation en un problème équivalent de point fixe, de la forme $F(x)=x$. On peut le faire de plusieurs façons, par exemple en prenant $F(x) = x + \lambda(x) f(x)$ où λ est une fonction qui ne s'annule pas.

Rouvière p 151 à 153.

Demailly p 96

En fait, on sait que la convergence des itérées $x_{n+1} = F(x_n)$ vers la solution ℓ cherchée sera très rapide si ce point est superattractif, i.e $F'(\ell)=0$.

Or $F'(\ell) = 1 + \lambda'(\ell) \underbrace{f(\ell)}_{=0} + \lambda(\ell) f'(\ell) = 1 + \lambda(\ell) f'(\ell)$, ce qui incite

donc à choisir $\lambda(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$ et donc à considérer $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Interprétation géométrique :

L'égalité $f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$ exprime le fait que x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection avec l'axe Ox de la droite $y = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$, qui est la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_n.

Convergence quadratique : si $|x_n - \ell|$ est de l'ordre de 10^{-p}, le terme suivant sera de l'ordre de 10^{-2p} : le nombre de décimales exactes dans l'approx. de ℓ par x_n est sensiblement doublé à chaque itération !

La convergence est donc très rapide, à condition de partir d'un x_0 suffisamment proche de ℓ (qu'on obtient en pratique avec une méthode moins forte comme la dichotomie).
On constate que cette contrainte s'assouplit pour des fonctions agréables comme les fonctions convexes.

Autres méthodes itératives :

Sécante : Situation où la dérivée de f est compliquée / impossible à calculer explicitement. On imite alors la méthode de Newton en remplaçant f' par le taux d'accroissement de f sur un petit intervalle.

Demailly p 102 — Si f est C^2, de dérivée f' ne s'annulant pas sur $I = [\ell-\delta, \ell+\delta]$, si on note $(s_p)_{p\geq 0}$ la suite de Fibonacci de premiers termes $s_0 = s_1 = 1$, alors il existe $K, h > 0$ tq $\forall x_0, x_1 \in [\ell-h, \ell+h]$ distincts, on ait

$$|x_p - \ell| \leq \frac{1}{K}\left(K \max(|x_0-\ell|, |x_1-\ell|)\right)^{s_p}$$

Comme $s_p \underset{p\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{p+1}$, on a une suite d'ordre $\varphi \simeq 1{,}618$ i.e le nombre de décimales exactes croît environ d'un facteur φ à chaque itération, ce qui est légèrement moins rapide que Newton.

Newton-Raphson : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de classe C^2 telle qu'il existe $\ell \in \Omega$ vérifiant $f(\ell) = 0$. On suppose de plus que $df_\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ est inversible. Alors il existe un voisinage U de ℓ dans Ω tel que l'application

Demailly p 110

$$\varphi : \begin{array}{l} x \longmapsto x - df_x^{-1}(f(x)) \\ U \longrightarrow \mathbb{R}^m \end{array}$$

soit bien définie et possède ℓ comme point fixe superattractif.

C'est la version multidimensionnelle de la méthode de Newton.