Ellipsoïde de John-Loewner

Recasage : 170, 171, 219 ⊕ [Lemme : 229 ; Corollaire : 203]

Référence : FGN, Algèbre 3

Théorème : soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne habituelle. Un ellipsoïde plein centré en 0 de $\mathbb{R}^n$ peut être défini par $\mathcal{E}_q := \{x \in \mathbb{R}^n : q(x) \leq 1\}$ où q est une forme quadratique définie positive. Soit $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$

① Calcul du volume V_q de $\mathcal{E}_q$.

Par réduction de Gauss, il existe une base orthonormée (pour le p.s euclidien) $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ dans laquelle q s'écrit $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ avec $a_i > 0$ car q est déf. positive.

Donc $V_q = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\mathcal{E}_q}(x)\,dx \overset{(*)}{=} \int \dots \int_{a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_n$

(*) Si $x \in \mathbb{R}^n$ est de coord. $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, $q(x) = \sum a_i x_i^2$. $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_c, \mathcal{B})$ $\varphi : x \mapsto {}^tP x$ est un C^1-difféo. de Jacobien $\det({}^tP) = 1$ donc on a le résultat par CV.

On fait le changement de variables $x_i = \frac{t_i}{\sqrt{a_i}}$ qui est bien un C^1-difféo. dont le Jacobien est $\frac{1}{\sqrt{a_1 \cdots a_n}}$.

Si S est la matrice de q dans une base orthonormée quelconque de $\mathbb{R}^n$, il existe $P \in O(n)$ tq $S = P . \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)\, {}^tP$. Ainsi $\det S = \det(\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)) = a_1 \cdots a_n$ ne dépend pas du choix de la base orthonormée choisie. On note cette quantité $\det q$.

Par changement de variables, on trouve donc $V_q = \int \dots \int_{t_1^2 + \dots + t_n^2 \leq 1} \frac{dt_1 \dots dt_n}{\sqrt{\det q}} = \frac{v_n}{\sqrt{\det q}}$.

② Reformulation du problème

On cherche donc à maximiser $\det q$ tout en ayant $\mathcal{E}_q \supset K$, et montrer l'unicité d'une telle q. On munit l'espace des formes quadratiques de la norme N définie par $N(q) = \sup_{x \in K} |q(x)|$

Seul point non trivial : si $N(q) = 0$ alors $\forall x \in K$, $q(x) = 0$

K étant d'intérieur non vide, $\exists x \in K, \exists r > 0$ tq $B(x,r) \subset K$; donc pour $M > 0$ assez grand, $\forall j$, $x + \frac{e_j}{M} \in K$

D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\sqrt{q\left(\frac{e_j}{M}\right)} = \sqrt{q\left(\frac{e_j}{M}+x-x\right)} \leq \underbrace{\sqrt{q(\underbrace{\tfrac{e_j}{M}+x}_{\in K})}}_{=0} + \underbrace{\sqrt{q(-x)}}_{=q(x)=0 \text{ car } x\in K}$$

donc $q\left(\frac{e_j}{M}\right) = \frac{q(e_j)}{M^2} = 0 \quad \forall j$ donc $q \equiv 0$.

On considère alors $\mathcal{A} = \{ \text{f.q} \geq 0 \text{ tq } \mathcal{E}_q \supset K \} = \{ \text{f.q} \geq 0 \text{ tq } \forall x\in K, q(x) \leq 1 \}$
$= Q^+ \cap B_{f,N}(0,1)$

de sorte qu'on cherche à maximiser $q \longmapsto \det q$ sur $\mathcal{A}$.

3 Existence

- $\mathcal{A}$ est non vide : K est compact donc borné : $\exists M>0$ tq $\forall x\in K$, $\|x\| \leq M$

  donc $q_0 : x \longmapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ est une forme quadratique ≥ 0 tq $\forall x\in K$, $q_0(x) \leq 1$

- L'espace des formes quadratiques étant de dimension finie, $B_{f,N}(0,1)$ est compacte par le théorème de Riesz. De plus, comme la convergence pour N implique la convergence simple, une suite de f.q ≥ 0 ne peut converger que vers une f.q ≥ 0 i.e Q^+ est fermé. Donc $\mathcal{A}$ est fermé dans un compact donc est compact.

- Comme det est continue, $q \mapsto M(q) \mapsto \det q$ est continue sur le compact $\mathcal{A}$ donc y admet un maximum q_K. Par ailleurs, $\det q_K \geq \det q_0 > 0$

  car q_0 est définie positive.

  donc q_K est déf. positive.

Il existe donc un ellipsoïde $\mathcal{E}_{q_K}$ de volume minimal contenant K.

4 Unicité

- $\mathcal{A}$ est convexe : si q et q' sont dans $\mathcal{A}$ et si $t\in[0,1]$, il est clair que $tq+(1-t)q'$ est une forme quadratique positive et si $x\in K$,

  $[tq+(1-t)q'](x) = tq(x)+(1-t)q'(x) \leq t+1-t = 1$ d'où $tq+(1-t)q' \in \mathcal{A}$.

- S'il existe $q\in\mathcal{A}$ tq $q \neq q_K$ et $\det q = \det q_K$. Soit S et S_K les matrices de q et q_K dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par convexité de $\mathcal{A}$, on a $\frac{1}{2}(q+q_K) \in \mathcal{A}$

Par stricte convexité logarithme du déterminant, on a $\det\left(\frac{1}{2}(q+q_K)\right) > \det q^{1/2} \det q_K^{1/2}$
$= \det q_K$

ce qui contredit la maximalité de $\det q_K$. Donc q_K est unique, d'où le résultat. □

Détails

FGN, Algèbre 3
3.31 p222

Lemme : $\forall A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\forall \alpha, \beta \geq 0$ tq $\alpha + \beta = 1$, alors
$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$ et l'inégalité est stricte lorsque $A \neq B$ et $\alpha \in]0,1[$.

Dém : Par réduction simultanée, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

tq $\begin{cases} {}^tPAP = I_n \\ {}^tPBP = D \end{cases}$ et comme $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$

Donc, en le réécrivant $\begin{cases} {}^tQQ = A \\ {}^tQDQ = B \end{cases}$ avec $Q = P^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$

on a $\det(\alpha A + \beta B) = \det\left[{}^tQ(\alpha I_n + \beta D)Q\right]$
$= (\det Q)^2 \det(\alpha I_n + \beta D)$

et $(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det Q)^{2\alpha} (\det Q \cdot \det D \det Q)^\beta$
$= (\det Q)^{2(\alpha+\beta)} \cdot (\det D)^\beta$
$= (\det Q)^2 (\det D)^\beta$ car $\alpha + \beta = 1$.

Comme $(\det Q)^2 > 0$, on cherche donc à montrer que

$\det(\alpha I_n + \beta D) \geq (\det D)^\beta$ ce qu'on peut réécrire

$$\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta \lambda_i) \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^\beta$$

ou encore, en prenant le log, $\sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \beta \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i$

Or par concavité du log, on a $\ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \alpha \ln 1 + \beta \ln \lambda_i$
$= \beta \ln \lambda_i$

et on a le résultat en sommant.

Si $A \neq B$, $\exists \lambda_{i_0} \neq 1$ donc si $\alpha \in]0,1[$, par strict. concavité du log, on a $\ln(\alpha + \beta\lambda_{i_0}) > \beta \ln(\lambda_{i_0})$

puis $\det(\alpha A + \beta B) > (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$. □

Réduction simultanée :
$A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc
$(X, Y) \mapsto {}^tXAY$
est un p.s sur $\mathbb{R}^n$
donc $\exists$ b.o.n pour ce p.s i.e $\exists M \in GL_n(\mathbb{R})$
tq ${}^tMAM = I_n$
Comme $B \in S_n(\mathbb{R})$
${}^tMBM \in S_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable en b.o.n
donc $\exists Q \in O(n)$ tq
${}^tQ\,{}^tMBMQ = D$
avec D diag. réelle.
$P = MQ$ ${}^tP = {}^tQ\,{}^tM$
$\Rightarrow D = {}^tPBP$
et ${}^tQ\,{}^tMAMQ = {}^tQQ = I_n$.
$\underset{{}^tPAP}{\shortparallel}$ □

Une application de John-Loewner :

FGN, Algèbre 3
3.38 p231

Corollaire : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geq 1$.
Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$, alors il existe un p.s sur E associé à une forme quadratique q tel que
$G \subset O(q) = \{u \in GL(E) : q \circ u = q\}$

Dém : on munit E d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$ quelconque et soit B la boule unité fermée pour cette norme.
Soit $K = \{g(x) : g \in G, x \in B\}$. Il est compact comme image du compact $G \times B$ par l'application continue $(g,x) \mapsto g(x)$.
Il est d'intérieur non vide car contient B pour $g = id_E$.

Par le théorème de John-Loewner, soit $\mathcal{E}_q$ l'unique ellipsoïde de volume minimal contenant K (q déf. positive)

Soit $g \in G$, soit $q' = q \circ g$, montrons que $q' = q$
- Mq $K \subset \mathcal{E}_{q'}$: soit $y \in K$, il existe $g' \in G$ et $x \in B$ tq $y = g'(x)$
Donc $q'(g'(x)) = q \circ \underbrace{g \circ g'}_{\in G}(x) \leq 1$ car $K \subset \mathcal{E}_q$ et donc $y \in \mathcal{E}_{q'}$.

- Mq $V_q = V_{q'}$, ce qui revient à montrer $\det q = \det q'$
G est compact donc det est bornée sur G donc sur $\{g^p : p \in \mathbb{Z}\}$.
Or si $|\det g| > 1$, on a $\lim\limits_{p \to \infty} |\det g^p| = \lim\limits_{p \to \infty} |\det g|^p = +\infty$.
Donc $|\det g| \leq 1$. Si $|\det g| < 1$, alors de même, $\lim\limits_{p \to -\infty} |\det g^p| = \infty$
Bref $|\det g| = 1$
Donc $\det q' = \det q$ d'où $V_{q'} = V_q$.

Par unicité de $\mathcal{E}_q$, on a donc $q' = q$ donc $q \circ g = q$ donc $g \in O(q)$ et donc finalement, $G \subset O(q)$. □

[BP] p 263-264 : volume de la boule unité fermée

$v_d := \lambda_d(B_d)$ où B_d : boule unité fermée dans $\mathbb{R}^d$, λ_d mesure de Leb. dans $\mathbb{R}^d$

Alors $v_d = \frac{\pi^{d/2}}{\left(\frac{d}{2}\right)!}$ si d pair, $v_d = \frac{2^d \pi^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d-1}{2}\right)!}{d!}$ sinon

Si $d \geq 2$, $v_d = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \cdots + x_d^2 \leq 1\}} dx_1 \cdots dx_d$

$$\underset{\text{Tonelli}}{\overset{\text{Fubini-}}{=}} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x_{d-1}^2 + x_d^2 \leq 1\}} \left[\int_{\mathbb{R}^{d-2}} \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \cdots + x_{d-2}^2 \leq 1 - (x_{d-1}^2 + x_d^2)\}} dx_1 \cdots dx_{d-2} \right] dx_{d-1}\, dx_d$$

On calcule l'intégrale entre crochets:

- Si $x_{d-1}^2 + x_d^2 = 1$, $\int_{\mathbb{R}^{d-2}} \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \cdots + x_{d-2}^2 \leq 1 - (x_{d-1}^2 + x_d^2)\}} dx_1 \cdots dx_{d-2}$

$$= \lambda_{d-2}(\{0_{\mathbb{R}^{d-2}}\}) = 0$$

- Si $x_{d-1}^2 + x_d^2 < 1$, on pose $x_i = u_i \sqrt{1 - (x_{d-1}^2 + x_d^2)}$ pour $1 \leq i \leq d-2$

ce qui définit une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^{d-2}$ dans $\mathbb{R}^{d-2}$ de det $= (1 - (x_{d-1}^2 + x_d^2))^{\frac{d-2}{2}}$

En remarquant que $x_1^2 + \cdots + x_{d-2}^2 \leq 1 - (x_{d-1}^2 + x_d^2)$

ssi $(u_1^2 + \cdots + u_{d-2}^2)(1 - (x_{d-1}^2 + x_d^2)) \leq \underbrace{1 - (x_{d-1}^2 + x_d^2)}_{\neq 0}$

ssi $u_1^2 + \cdots + u_{d-2}^2 \leq 1$ car

Donc par changement de variables,

$$\int_{\mathbb{R}^{d-2}} \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \cdots + x_{d-2}^2 \leq 1 - (x_{d-1}^2 + x_d^2)\}} dx_1 \cdots dx_{d-2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d-2}} \mathbb{1}_{\{u_1^2 + \cdots + u_{d-2}^2 \leq 1\}} (1 - (x_{d-1}^2 + x_d^2))^{\frac{d}{2}-1} du_1 \cdots du_{d-2}$$

$$= (1 - (x_{d-1}^2 + x_d^2))^{\frac{d}{2}-1} \int_{B_{d-2}} du_1 \cdots du_{d-2} = \overbrace{\lambda_{d-2}(B_{d-2})}^{v_{d-2}} \cdot (1 - (x_{d-1}^2 + x_d^2))^{\frac{d}{2}-1}$$

Donc $v_d = v_{d-2} \displaystyle\int_{\{x_{d-1}^2 + x_d^2 \leq 1\}} \left(1 - (x_{d-1}^2 + x_d^2)\right)^{\frac{d}{2}-1} dx_{d-1}\, dx_d$

$$= v_{d-2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{+\infty} (1-r^2)^{\frac{d}{2}-1} \mathbb{1}_{\{0 \leq r \leq 1\}}\, r\, dr\, d\theta$$

$\frac{d}{2}(-2r)$

$$= 2\pi\, v_{d-2} \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{d}{2}-1}\, r\, dr$$

$$= -\frac{2\pi}{d} v_{d-2} \left[(1-r^2)^{\frac{d}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{2\pi}{d} v_{d-2}$$

Avec $v_0 = 1$ (convention) et $v_1 = \lambda_1([-1,1]) = 2$

$$v_{2p} = \frac{\pi}{p} v_{2(p-1)} = \cdots = \frac{\pi^p}{p!} v_0 = \frac{\pi^p}{p!}$$

$$v_{2p+1} = \frac{2\pi}{2p+1} v_{2p-1} = \cdots = \frac{(2\pi)^p}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3\cdot 1} v_1$$

$$= 2^{p+1} \pi^p \frac{(2p)(2p-2)\cdots 4\cdot 2}{(2p+1)!}$$

$$= 2^{2p+1} \pi^p \frac{p!}{(2p+1)!}$$