Equation de Hill-Mathieu

<u>Recasage</u> : 220, 221

<u>Référence</u> : Zuily, Queffelec 4ed. (2013) p410

$$\boxed{(E) \quad y'' + qy = 0 \qquad q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continue, paire et } \pi\text{-périodique}}$$

① Existence, unicité, espace des solutions, invariance par translation

y solution de (E) $\Leftrightarrow$ $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ solution de $Y' = MY$ avec

$$M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{continue.}$$
$$x \longmapsto M(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Par Cauchy-Lipschitz linéaire, $\forall (a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution globale $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de (E) tq $y(0) = a_0$ et $y'(0) = b_0$.

Soit W l'espaces des solutions complexes de (E), c'est un $\mathbb{C}$-sous espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de dimension 2.

Une base de W est donnée par les solutions y_1 et y_2 telles que

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

Comme q est à valeurs réelles, c'est aussi le cas de y_1 et y_2.

Si y est solution de (E), on a

$$(\tau_{-\pi} y)'' + q(\tau_{-\pi} y) = \tau_{-\pi} y'' + \tau_{-\pi}(qy) = \tau_{-\pi}(y'' + qy) = 0$$

en effet $\tau_{-\pi} q = q$ car q est π-périodique.

$\tau_{-\pi}$ induit donc un endomorphisme de W dont on note A la matrice dans la base (y_1, y_2). On note $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ on a $Ay_1(x) = y_1(x+\pi) = ay_1(x) + by_2(x)$

$$y_1'(x+\pi) = ay_1'(x) + by_2'(x)$$

En évaluant en 0 : $y_1(\pi) = a$, $y_1'(\pi) = b$. De même $y_2(\pi) = c$ et $y_2'(\pi) = d$

$$A = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix} \qquad T = \mathrm{Tr}\, A = y_1(\pi) + y_2'(\pi) = a+d.$$

② Lemme : i) y_1 est paire, y_2 est impaire

ii) $\det A = 1$

iii) $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$ $(a=d)$

i) Avec $\tilde{y}_1(x) = y_1(-x)$ on a

$$(\tilde{y}_1'' + q\tilde{y}_1)(x) = \tilde{y}_1''(x) + q(t)y_1(-t) \overset{q \text{ paire}}{=} y_1''(-t) + q(-t)y_1(-t) = 0$$

et $\begin{cases} \tilde{y}_1(0) = y_1(0) = 1 \\ \tilde{y}_1'(0) = y_1'(0) = 0 \end{cases}$ donc par unicité dans Cauchy-Lipschitz, $\tilde{y}_1 = y_1$.

De même $\tilde{y}_2$ est solution et $(y_2(0), y_2'(0)) = (0,-1)$ donc $\tilde{y}_2 = -y_2$.

Bref y_1 est paire, y_2 est impaire.

ii) Soit w le wronskien de (y_1, y_2) : $w = y_1y_2' - y_2y_1'$

$$w' = (y_1y_2' - y_2y_1')' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1''$$
$$= -y_1qy_2 + qy_1y_2 = 0$$

Donc w est constant et $\det A = w(\pi) = w(0) = 1$. ($w' = 0$ sur $\mathbb{R}$ connexe $\Rightarrow$ cst.)

iii) La réciproque de $\tau_{-\pi}$ est évidemment τ_π, dont la matrice est

$$B = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \tau_{-\pi} f(x) = f(x+\pi) \\ \tau_\pi f(x) = f(x-\pi) \end{array}}$$

Or $B = A^{-1} = \dfrac{1}{\underbrace{\det A}_{=1}} \begin{pmatrix} y_2'(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_1(\pi) \end{pmatrix}$ d'où $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$

③ Prop : i) si $|T| < 2$, toutes les solutions de (E) sont bornées

ii) si $|T| = 2$, (E) possède une solution non nulle et bornée

$|T| = 2 \iff bc = 0$

iii) si $|T| > 2$, toute solution de (E) non nulle est non bornée

$\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det A = X^2 - TX + 1$ qui est de discriminant $\Delta = T^2 - 4$.

i) Si $|T|<2$, χ_A admet deux racines complexes conjuguées ρ et $\bar{\rho}$ (de module 1 car $\rho\bar{\rho} = |\rho|^2 = \det A = 1$). A est ainsi diagonalisable, soit (u,v) une base de W formée de vecteurs propres de A.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left.\begin{aligned} Au(x) &= u(x+\pi) = \rho u(x) \\ Av(x) &= v(x+\pi) = \bar{\rho} v(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow |u(x+\pi)| = |u(x)| \text{ idem pour } v.$$

Ainsi $|u|$ et $|v|$ sont continues et π-périodiques donc sont bornées

ii) Si $T = \pm 2$, alors $\Delta = 0$ et χ_A admet une racine réelle double r telle que $r^2 = \det A = 1$ i.e $r = \pm 1$ i.e $\chi_A = (X \pm 1)^2$. Si $u \in W$ est $\overrightarrow{vp}$ de A associé à ± 1, $\forall x \in \mathbb{R}$ $Au(x) = u(x+\pi) = \pm u(x)$ et une nouvelle fois u est bornée. (et non nulle... car $\overrightarrow{vp}$)

$$\left(\begin{aligned} &\text{De plus } T = a+d = 2a = \pm 2 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow ad = a^2 = 1 \\ &\qquad \Rightarrow (\text{comme } \det A = ad - bc = 1) \\ &\qquad\qquad bc = 0. \\ &\text{Réciproquement si } bc = 0 \Rightarrow \underset{a^2}{\underset{\shortparallel}{ad}} = 1 \Rightarrow a = d = \pm 1 \Rightarrow T = \pm 2. \end{aligned}\right)$$

iii) Si $|T|>2$, χ_A admet deux racines réelles ρ et ρ' avec $\rho\rho' = \det A = 1$ i.e $\rho' = \frac{1}{\rho}$. On peut supposer $|\rho| > 1 > |\rho'|$.

De plus A est diagonalisable : soit (u,v) base de W de $\overrightarrow{vp}$ de A.

Si y est une solution de (E) non nulle, on écrit $y = au + bv$ $\quad (a,b) \neq (0,0)$

Par Cauchy-Lipschitz, $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tq $u(x_1) \neq 0$ et $v(x_2) \neq 0$.

Or $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$, $y(x+n\pi) = a\rho^n u(x) + b\rho^{-n} v(x)$

- Si $a \neq 0$, $|y(x_1+n\pi)| \underset{n \to +\infty}{\sim} |a| \cdot |u(x_1)| \cdot |\rho|^n$

  donc $|y(x_1+n\pi)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

- Si $b \neq 0$, $|y(x_2+n\pi)| \underset{n \to -\infty}{\sim} |b| \cdot |v(x_2)| \cdot |\rho|^{-n}$

  donc $|y(x_2+n\pi)| \xrightarrow[n \to -\infty]{} +\infty$

Bref toute solution de (E) non nulle est non bornée. $\square$

Remarques

- Pour $q \equiv 1$: on trouve $y_1 = \cos$, $y_2 = \sin$ et $T = y_1(\pi) + y_2'(\pi) = 2\cos(\pi) = -2$

  donc il existe des solutions non nulles bornées (en fait elles le sont toutes).

- Pour $q \equiv 1$: on trouve $y_1 = ch$, $y_2 = sh$ et $T = y_1(\pi) + y_2'(\pi) = 2ch(\pi) > 2$.

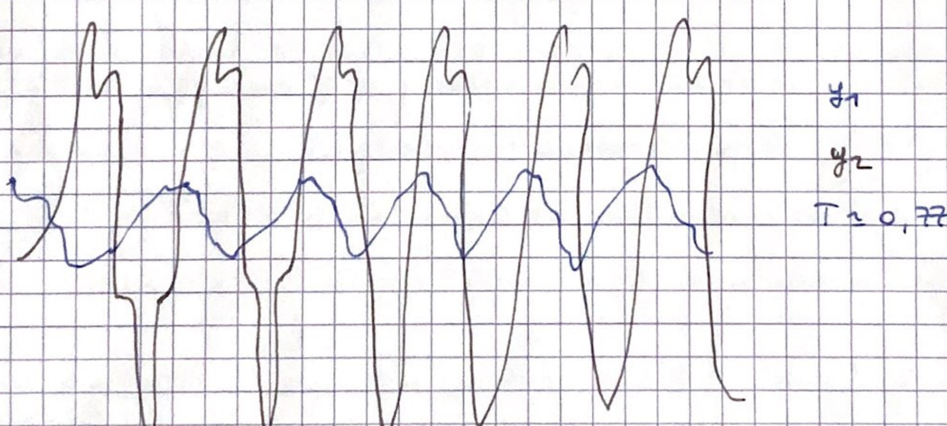
  donc il n'existe pas de solution bornée non nulle.

- En général on ne peut résoudre explicitement (E) pour des q plus complexes.

  Par exemple pour $q(x) = \cos(2x)$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(2x) & 0 \end{pmatrix}$ et la résultante

  $R(x) = \exp \int_0^x M(t)dt$ n'est pas calculable explicitement.

  En revanche, en sachant que $T = y_1(\pi) + y_2'(\pi) = 2y_1(\pi)$, il suffit de savoir approximer assez précisément y_1 et y_2 (méthode d'Euler ?) pour pouvoir déterminer si on a une chance de trouver des solutions bornées non triviales.



- <u>Equation de Mathieu</u> : $q(x) = \lambda - 2\varepsilon\cos(2x)$ rencontrée en étudiant les vibrations d'une membrane elliptique.

  Le pendule paramétrique relève également de cette équation.

  Hill a retrouvé une équation similaire en étudiant le périgée de la lune.