Théorème de Grothendieck

Leçons : 201, 205, 208, 234

Références : Zavidovique p 180 + Rudin, Analyse fonctionnelle p 117 (pour 3)

Théorème : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure totale finie, $1 \leq p < \infty$ et F un sev fermé de $L^p(\mu)$ qui est inclus dans $L^\infty(\mu)$. Alors F est de dim. finie.

Quitte à renormaliser, on peut supposer $\mu(X) = 1$. On va se ramener au cadre hilbertien de $L^2(\mu)$ pour utiliser ses propriétés fondamentales : bases hilbertiennes, théorème de Pythagore...

1. On montre qu'il existe $K > 0$ tq $\forall f \in F$, $\|f\|_\infty \leq K \|f\|_p$.

On définit l'inclusion $i : (F, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_p)$

i est clairement linéaire bijective.

Si $f \in F$, on a $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ μ-presque partout. Ainsi,

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X \|f\|_\infty^p \, d\mu \right)^{1/p} = \|f\|_\infty \cdot \mu(X)^{1/p} = \|f\|_\infty$$

donc i est continue.

Or F est fermé dans $L^p(\mu)$ qui est un Banach par Riesz-Fischer, donc $(F, \|\cdot\|_p)$ est encore un Banach.

Soit ensuite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans F qui converge au sens de $L^\infty(\mu)$ vers une fonction $f \in L^\infty(\mu)$. Par continuité de l'application i, la suite $(i(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $i(f)$ au sens de $L^p(\mu)$. Or $(F, \|\cdot\|_p)$ est un Banach fermé donc $f \in F$. Donc F est fermé dans $L^\infty(\mu)$ qui est un Banach par Riesz-Fischer donc $(F, \|\cdot\|_\infty)$ est encore un Banach.

i est donc linéaire continue et bijective entre deux espaces de Banach donc d'après le théorème de l'application ouverte (ou le théorème d'iso. de Banach), i est bicontinue donc il existe $K > 0$ tq

$$\forall f \in F,\ \|f\|_\infty \leq K \|f\|_p .$$

② On montre qu'il existe $M > 0$ tq $\forall f \in F$, $\|f\|_\infty \leq M \|f\|_2$.

Pour $p = 2$, c'est l'étape ①.

Pour $1 \leq p < 2$, l'inégalité de Hölder pour les réels conjugués $\frac{2}{p}$ et $\frac{2}{2-p}$ donne pour tout $f \in F$:

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^{p \cdot 2/p} \, d\mu \right)^{p/2} (\mu(X))^{1 - p/2} = \|f\|_2^p$$

donc $\|f\|_p \leq \|f\|_2$ donc avec ①, $\|f\|_\infty \leq K \|f\|_2$.

Pour $p > 2$, pour $f \in F$ on a $|f(x)|^p \leq \|f\|_\infty^{p-2} \cdot |f(x)|^2$ μ-presque partout donc

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\infty^{p-2} \int_X |f|^2 \, d\mu = \|f\|_\infty^{p-2} \cdot \|f\|_2^2$$

Donc par ①, $\|f\|_\infty^p \leq K^p \|f\|_p^p \leq K^p \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2$ d'où $\|f\|_\infty \leq K^{p/2} \|f\|_2$

Donc pour $M = \max(K, K^{p/2})$, on a $\forall f \in F$, $\|f\|_\infty \leq M \|f\|_2$.

③ On majore le cardinal de toute famille orthonormée de F par M^2.

Par Gram-Schmidt il suffit de majorer le card. de toute famille orthonormée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de F, orthonormée dans $L^2(\mu)$.

Comme $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable, il existe $X' \subset X$ de mesure pleine tq pour tout $(c_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Q}^n$ et tout $x \in X'$, on a :

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|_\infty$$

Or d'après ②, comme $\sum_{i=1}^n c_i f_i \in F$ (car F est un ev), on a

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\right\|_\infty \leq M \underbrace{\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\right\|_2}$$

$$\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \underbrace{\|f_i\|_2^2}_{=1}}$$

i.e $\forall (c_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Q}^n$, $\forall x \in X'$, $\left|\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right| \leq M \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2}$

Comme $(c_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$ est continue à $x \in X'$ fixé (car polynomiale en les c_i) et de même pour $(c_i) \longmapsto \sqrt{\sum |c_i|^2}$, on a par densité :

$$\forall (c_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n, \ \forall x \in X', \ \left|\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right| \leq M \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2}$$

En particulier, pour $x \in X'$ et $c_i = f_i(x)$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2 \leq M \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2}$$

donc $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2\right)^2 \leq M^2 \sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2$ i.e $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2 \leq M^2$

Ceci étant vrai pour μ-presque tout $x \in X$, on peut intégrer sur X :

$$n = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_2^2 = \int_X \sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2 \, d\mu(x) \leq M^2 \mu(X) = M^2.$$

Toute famille orthonormée de F est donc de cardinal inférieur à M^2 donc F est de dimension finie $\leq M^2$.

Détails

Existence de X' : Pour tout $(c_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{Q}^n$ on dispose de $\Omega_{(c_i)}$ de mesure pleine tq $\forall x \in \Omega_{(c_i)}$

on a bien $\left| \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \right| \le \| \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \|_\infty$. Il suffit de vérifier qu'une

intersection dénombrable de mesures pleins est encore de mesure pleine, ou encore qu'une union dénombrable de négligeables est négligeable : c'est bien le cas par sous-additivité.

Pourquoi prendre $(f_i)_{1 \le i \le n}$ orthonormée ? Gram-Schmidt : étant donné $(x_p)_{1 \le p \le n}$ une famille libre d'un espace préhilbertien, il existe une unique famille orthonormée $(e_p)_{1 \le p \le n}$ telle que :

- $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p) \quad \forall 1 \le p \le n$
- $\forall p, \ (e_p, x_p) > 0$.

Hölder : $\forall p, q > 0$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\forall f \in L^p(\mu)$, $\forall g \in L^q(\mu)$, on a $fg \in L^1(\mu)$ et
$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q .$$

On commence par montrer Young : $\forall a, b > 0$, $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
Pour cela on utilise la convexité de exp :

$$ab = \exp\left(\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \right) \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Si $\|f\|_p$ et/ou $\|g\|_q$ est nul, c'est bon, sinon on applique Young à $\frac{|f|}{\|f\|_p}$ et $\frac{|g|}{\|g\|_q}$

$$\frac{|f| \cdot |g|}{\|f\|_p \|g\|_q} \le \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$$ et on intègre :

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \, d\mu \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q \underbrace{\left(\frac{1}{p} \underbrace{\int \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} d\mu}_{1} + \frac{1}{q} \underbrace{\int \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} d\mu}_{1} \right)}_{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1} \qquad \square$$

Analyse fonctionnelle.

Théorème de l'iso. de Banach : Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue et bijective entre deux espaces de Banach. Alors f est un homéo. i.e est bicontinue.

Dém : f est linéaire continue surjective entre deux Banach : elle est ouverte et donc bicontinue. $\square$

Théorème de l'appli° ouverte : Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue surjective entre deux espaces de Banach. Alors f est ouverte.

Lemme : $f : E \to F$ linéaire entre evn est ouverte ssi $\exists r > 0$ tel que
$B_F(0, r) \subset f(B_E(0,1))$.

Dém : $\Rightarrow$ ok.

$\Leftarrow$ Soit $U \subset E$ ouvert non vide. Soit $x \in U$, il existe $\rho > 0$ tq $B(x, \rho) \subset U$.
Par linéarité de f, on a

$$f(B(x,\rho)) = f(x + \rho B(0,1)) = f(x) + \rho f(B_E(0,1)) \supset B(f(x), \rho r)$$

Ainsi $f(U)$ est voisinage de tous ses points : c'est un ouvert. $\square$

Dém : ① On montre qu'il existe $r > 0$ avec $B_F(0,r) \subset \overline{f(B_E(0,1))}$.

Par surjectivité de f, $F = f(E) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} f(B_E(0,n)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{f(B_E(0,n))}$

Comme F est complet, d'après le théorème Baire, l'un de ces fermés est d'intérieur non vide : $\exists y \in F, \exists \rho > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $B(y, \rho) \subset \overline{f(B_E(0,n))}$
Par linéarité de f, $-y \in \overline{f(B_E(0,n))}$ d'où

$$B_F(0, \rho) \subset \overline{f(B_E(0,n))} + \overline{f(B_E(0,n))} \subset \overline{f(B_E(0,2n))}$$

On a le résultat voulu par homogénéité de f avec $r = \rho / 2n$.

② On montre que $B_F(0,r) \subset f(B_E(0,2))$.

Soit pour cela $z \in F$ avec $\|z\| < r$. D'après (1), $\exists x_1 \in E$ avec $\|x_1\| < 1$ et $\|z - f(x_1)\| < r/2$.

On construit ainsi par récurrence une suite (x_n) de E avec $\|x_n\| < 2^{-n+1}$ et $\|z - f(x_1) - \dots - f(x_n)\| < r 2^{-n}$.

La série $\sum x_k$ est alors normalement convergente dans le Banach E, elle converge donc vers un $x \in E$. Par inégalité triangulaire, on a $\|x\| < 2$ et la continuité de f donne $\|z - f(x)\| = 0$ i.e $z = f(x)$. $\square$

Théorème (Baire) : (X, d) métrique complet, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses de X. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est encore une partie dense de X.

Dém : Montrons par récurrence sur p qu'un ouvert V non vide rencontre toujours chacune des intersections finies $U_0 \cap \dots \cap U_p$.

Pour $p = 0$, c'est la densité de U_0. Il existe donc une boule $\overline{B(a_0, r_0)} \subset V \cap U_0$.

Choisissons r_0 tel que $0 < r_0 \leq 1$.

Supposons que l'on a construit une boule fermée $\overline{B(a_p, r_p)} \subset V \cap U_0 \cap \dots \cap U_p$ avec $0 < r_p \leq 2^{-p}$. Comme U_{p+1} est dense, son intersection avec $B(a_p, r_p)$ est non vide : $\exists \overline{B(a_{p+1}, r_{p+1})} \subset B(a_p, r_p) \cap U_{p+1}$

$\subset V \cap (U_0 \cap \dots \cap U_p \cap U_{p+1})$

et on peut choisir r_{p+1} tq $0 < r_{p+1} < 2^{-p-1}$.

Puisque $\sum 2^{-p}$ est convergente, la suite (a_p) est de Cauchy (par inégalité triangulaire) dans X qui est complet : elle converge vers un point $a \in X$. Montrons que $a \in V \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n)$.

Pour $p \geq n$, on a $a_p \in \overline{B(a_n, r_n)} \subset V \cap (U_0 \cap \dots \cap U_n)$ donc (c'est là qu'on voit l'intérêt d'avoir pris des boules fermées) $a \in \overline{B(a_n, r_n)}$

$\subset V \cap (U_0 \cap \dots \cap U_n)$

Ceci étant vrai pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, $a \in V \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n)$ donc

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ rencontre tout ouvert non vide de X : c'est qu'il est dense. $\square$