Transformées de Fourier de Gaussiennes

236, 239, 250

① $G_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\widehat{G_\alpha}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$

- $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\xi \longmapsto e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}\right) \right| = \left| -ix e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} \right| \leq |x| e^{-\alpha x^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc $\widehat{G_\alpha}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{G_\alpha}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -ix e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}\,dx$$

On intègre par parties :

$$\widehat{G_\alpha}'(\xi) = i\left(\underbrace{\left[\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{i\xi}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}\,dx \right)$$

$$= -\frac{\xi}{2\alpha} \widehat{G_\alpha}(\xi)$$

Donc $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{G_\alpha}(\xi) = \widehat{G_\alpha}(0)\, e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$

② $\widehat{G_\alpha}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2}\,dx \underset{y=\sqrt{\alpha}x}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy}_{I}$

Par Fubini-Tonelli, $I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2}\,dr\,d\theta$ par passage en coord. polaires

$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} d\theta$

$= \pi$

Comme I est positive, on trouve $I = \sqrt{\pi}$ d'où finalement

$$\widehat{G_\alpha}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}.$$

③ Généralisation à $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, muni du p.s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euclidien usuel

Soit A une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ (donc diagonalisable dans une base orthonormée) avec ses valeurs propres réelles >0.
On définit alors $G_A(x) = e^{-\langle Ax, x \rangle}$ pour $x \in \mathbb{R}^n$

On note λ_j les vp de A, x_j les coord de x dans une base orthonormée de vecteurs propres, d'où $\langle Ax, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2$

d'où $G_A(x) = \prod_{j=1}^{n} e^{-\lambda_j x_j^2} = \prod_{j=1}^{n} G_{\lambda_j}(x_j)$ donc $G_A \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Ainsi $\widehat{G_A}$ est bien définie et on a $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{G_A}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} G_A(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} \left(G_{\lambda_j}(x_j) e^{-ix_j\xi_j}\right) dx$$

Par Fubini-Tonelli, $\int_{\mathbb{R}^n} \left| \prod_{j=1}^{n} G_{\lambda_j}(x_j) e^{-ix_j\xi_j} \right| dx = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} G_{\lambda_j}(x_j) dx_j$

$$= \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_j}} < +\infty$$

Donc $x \longmapsto \prod_{j=1}^{n} G_{\lambda_j}(x_j) e^{-ix_j\xi_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ donc par Fubini-Lebesgue,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \widehat{G_A}(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} G_{\lambda_j}(x_j) e^{-ix_j\xi_j} dx_j$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \widehat{G_{\lambda_j}}(\xi_j)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_j}} e^{-\frac{\xi_j^2}{4\lambda_j}}$$

$$= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\prod \lambda_j}} e^{-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j}{\lambda_j}\xi_j} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \underbrace{e^{-\frac{1}{4}\langle A^{-1}\xi, \xi \rangle}}_{G_{\frac{1}{4}A^{-1}}(\xi)}$$