Réf : Complex Analysis
Stein, Shakarchi

Formule des compléments

Pour $s \in \mathbb{C}$ tq $0 < Re(s) < 1$, $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$

236, 239, 265
245

On le montre pour $s \in]0,1[$ car alors les deux membres définissent des fonctions holo. sur $\{0 < Re\, z < 1\}$ qui coïncident sur l'ouvert $]0,1[$ qui possède un point d'accumulation, donc par unicité du prolongement analytique, la formule reste vraie pour $s \in \mathbb{C}$ tq $0 < Re(s) < 1$.

$0<s<1$, On a $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty} \Big(\underbrace{\int_0^{+\infty} u^{-s} e^{-u}\, du}_{\overset{u = tv}{=}\ t^{-s}\int_0^{+\infty} v^{-s} e^{-vt}\, t\, dv} \Big) t^{s-1} e^{-t}\, dt$

changement de variable affine.

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} v^{-s} e^{-vt}\, dv \right) e^{-t}\, dt$$

$$\overset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_0^{+\infty} \Big(\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-(1+v)t}\, dt}_{= \left[-\frac{e^{-(1+v)t}}{1+v} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+v}} \Big) v^{-s}\, dv$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^s(1+v)}$$

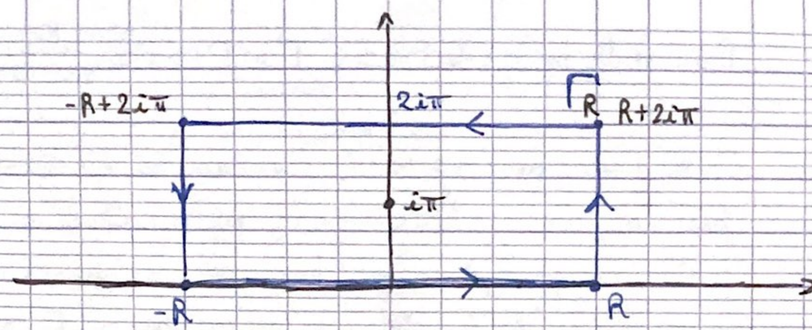
$$\overset{\text{par sym.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{v^{s-1}}{1+v}\, dv$$

$$\underset{\substack{\text{un } C^1\text{-difféo de } \mathbb{R} \\ \text{dans }]0,+\infty[}}{\overset{v = e^x \text{ qui est}}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x(s-1)}}{1+e^x} e^x\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{xs}}{1+e^x}\, dx$$

On pose $f(z) = \frac{e^{sz}}{1+e^z}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (i\pi + 2i\pi\mathbb{Z})$

$i\pi$ est un pôle simple de f et $(z-i\pi) f(z) = e^{sz} \frac{z - i\pi}{e^z - e^{i\pi}} \xrightarrow[z \to i\pi]{} \frac{e^{is\pi}}{e^{i\pi}} = -e^{is\pi}$

$\mathrm{Res}_a(f) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left((z-a)^n f(z) \right)$



D'après le théorème des résidus appliqué à f sur le contour Γ_R,

$$(*) \qquad \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2i\pi \operatorname{Res}_f(i\pi) = -2i\pi e^{is\pi}$$

- $$\left| \int_{[R,R+2i\pi]} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{s(R+i\theta)}}{1+e^{R+i\theta}}\, i\,d\theta \right| \leq C_1 e^{(s-1)R} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$
car $0<s<1$.

- $$\left| \int_{[-R+2i\pi,-R]} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{s(-R+i\theta)}}{\underbrace{1+e^{-R+i\theta}}_{|\cdot|\geq 1}}\, i\,d\theta \right| \leq C_2 e^{-sR} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$
car $s>0$

- $$\int_{[R+2i\pi,-R+2i\pi]} f(z)\,dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{s(t+2i\pi)}}{\underbrace{1+e^{t+2i\pi}}_{=1+e^t}}\,dt = -e^{2is\pi}\int_{-R}^{R} f(t)\,dt$$

Donc en passant à la limite $(R\to\infty)$ dans $(*)$, on trouve :

$$(1-e^{2i\pi s})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{sx}}{1+e^x}\,dx = -2i\pi e^{is\pi}$$

Donc $$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{sx}}{1+e^x}\,dx = \frac{2i\pi e^{is\pi}}{e^{2i\pi s}-1}$$

$$= \frac{2i\pi}{e^{i\pi s}-e^{-i\pi s}} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{1+e^{R+i\theta}} \right| d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{-R-i\theta}}{1+e^{-R-i\theta}} \right| d\theta$$

$$\leq e^{-R} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{1+\underbrace{e^{-R-i\theta}}_{|\cdot| = e^{-R} < 1}} \right| d\theta$$

$$= e^{-R} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-Rk-ik\theta} \right| d\theta$$

$$\leq e^{-R} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-R})^k \, d\theta$$

$$\leq e^{-R} \, 2\pi \, \frac{1}{1-e^{-R}}$$

pour $R \geq 1$ $$\leq \frac{2\pi e^{-R}}{1-e^{-1}}$$

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{1+\underbrace{e^{-R+i\theta}}_{|\cdot| = e^{-R} < 1}} \right| d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-Rk+ik\theta} \right| d\theta$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-Rk} \, d\theta$$

$$\leq \frac{2\pi}{1-e^{-R}}$$

$$\leq \frac{2\pi}{1-e^{-1}}$$ pour $R \geq 1$.