Candelpergher p212-30

# Intégrale de Dirichlet

① $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est semi-convergente

- Pour $A>0$, $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \underbrace{\left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^A}_{\xrightarrow[A\to\infty]{} 0} + \underbrace{\int_0^A \overbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}^{O(\frac{1}{x^2})}\,dx}_{\xrightarrow[A\to\infty]{} \text{lim. finie}}$

- Pour $N\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x+k\pi}\,dx$$

$$\underset{x\le\pi}{\geq} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty.$$

donc $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

② $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$

Soit $A>0$, on pose $f: \begin{array}{ccc} ]0,A[\times\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & e^{-xy}\sin x \end{array}$

Par Fubini-Tonelli, $\displaystyle\int_{]0,A[\times\mathbb{R}_+} |e^{-xy}\sin x|\,dx\,dy = \int_{]0,A[} \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-xy}\,dy\right)|\sin x|\,dx$

$$= \int_{]0,A[} \frac{|\sin x|}{x}\,dx < +\infty$$

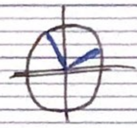
Donc $f$ est intégrable sur $]0,A[\times\mathbb{R}_+$ et on peut appliquer Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{]0,A[} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{]0,A[}\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Or $f(x,y) = e^{-xy}\sin x = \mathrm{Im}(e^{-xy}e^{ix}) = \mathrm{Im}(e^{x(i-y)})$ donc

$$\int_{]0,A[} e^{x(i-y)}\,dx = \frac{e^{A(i-y)}-1}{i-y} = \frac{(e^{-yA}e^{iA}-1)(i+y)}{-1-y^2}$$

$$= \frac{-e^{-yA}e^{i(A+\frac{\pi}{2})} + i + y - y e^{-yA}e^{iA}}{1+y^2}$$



donc $$\int_{]0,A[} f(x,y)\,dx = \mathrm{Im}(\dots) = \frac{1-e^{-yA}\sin(A+\frac{\pi}{2}) - y e^{-yA}\sin A}{1+y^2}$$

$$= \frac{1-e^{-yA}(\cos A + y\sin A)}{1+y^2}$$

donc $$\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-yA}(\cos A + y\sin A)}{1+y^2}\,dy$$

$$= \frac{\pi}{2} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-yA}(\cos A + y\sin A)}{1+y^2}\,dy}_{\xrightarrow[A\to\infty]{} 0}$$

(par ex. pour $A \geq 1$) or $$\left|\frac{e^{-yA}(\cos A + y\sin A)}{1+y^2}\right| \leq \frac{e^{-y}(1+y)}{1+y^2}$$ qui est intégrable

donc par convergence dominée,

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-yA}(\cos A + y\sin A)}{1+y^2}\,dy = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{A\to\infty} \frac{e^{-yA}(\cos A + y\sin A)}{1+y^2}\right)dy$$

$$= 0$$

donc en faisant $A \to \infty$ : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$. $\square$