Différentielle du déterminant

Leçon : 215

Référence : Rouvière (p84 + 284 pour l'application)

Prop : det est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\forall X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $d(\det)_X \cdot H = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X)H)$

Dém : det est polynomiale en les coefficients de la matrice donc de classe $\mathcal{C}^1$, donc il suffit de calculer ses dérivées partielles dans une direction quelconque $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour connaître sa différentielle.

Si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de H, on a :

$$\det(I_n + tH) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i) \underset{t \to 0}{=} 1 + t\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + o(t)$$

$$\underset{t \to 0}{=} \det(I_n) + t\,\mathrm{Tr}(H) + o(t)$$

Donc $\dfrac{\partial \det}{\partial H}(I_n) = \mathrm{Tr}(H)$.

Ainsi $d(\det)_{I_n} \cdot H = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(I_n) \cdot h_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Tr}(E_{i,j})\, h_{i,j}$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_{i,i} = \mathrm{Tr}(H).$$

Si $X \in GL_n(\mathbb{C})$,

Pour X inversible, $\mathrm{Com}(X) = \det(X)\,{}^tX^{-1}$.

$$\det(X+H) = \det(X)\det(I_n + X^{-1}H)$$
$$= \det(X)\left(\det(I_n) + d(\det)_{I_n} \cdot (X^{-1}H) + o(\|H\|)\right)$$
$$= \det(X)\left(1 + \mathrm{Tr}(X^{-1}H) + o(\|H\|)\right)$$
$$= \det(X) + \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X) \cdot H) + o(\|H\|)$$

d'où $d(\det)_X \cdot H = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X) \cdot H)$.

Si maintenant $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elle est trigonalisable : $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sur la diagonale tq $X = PTP^{-1}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $X_k = P(T + 2^{-k} I_n)P^{-1}$. On a

$\det(X_k) = \det(T + 2^{-k} I_n) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + 2^{-k}) \neq 0$ à partir d'un certain $k_0 \in \mathbb{N}$.

Or $\forall k \geq k_0$, $\|X_k - X\| \leq \|P\| \cdot \frac{1}{k} \|P^{-1}\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Donc $(X_k)_{k \geq k_0}$ est une suite de $GL_n(\mathbb{C})$ convergeant vers X donc $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Par continuité de Tr et de la comatrice (car les cofacteurs sont polynomiaux en les coefficients de la matrice), et comme $\det$ est de classe C^1, l'expression obtenue pour sa différentielle en un point inversible se prolonge par continuité à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tout entier.

Appli : $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - 1$ et $T_{I_n} SL_n \mathbb{R} = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}\, M = 0 \}$.

Dém : $SL_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\det - 1)$ qui est de classe C^∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de différentielle en $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $H \longmapsto \mathrm{Tr}(X^{-1}H)$ qui est une forme linéaire non nulle (car $\mathrm{Tr}(X^{-1}X) = n \neq 0$) donc surjective donc $\det - 1$ est une submersion et $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$, de classe C^∞ et $T_{I_n} SL_n \mathbb{R}$ est le noyau de $H \longmapsto \mathrm{Tr}\, H$.

Et bien sûr $T_X SL_n \mathbb{R} = \mathrm{Ker}\,(H \longmapsto \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X) H))$.

On a montré que $d(\det)_{I_n} = \mathrm{Tr}$, qui est surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ donc le déterminant est une submersion au voisinage de I_n. Ainsi $SL_n(\mathbb{C})$ est une sous-variété C^∞ de codimension 2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ au voisinage de I_n et $T_{I_n} SL_n(\mathbb{C})$ est encore l'ensemble des matrices (complexes cette fois) de trace nulle.

Si désormais $M \in SL_n(\mathbb{C})$, on note $L_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la multiplication à gauche par M, c'est un difféomorphisme d'inverse $L_{M^{-1}}$. Alors $SL_n(\mathbb{C})$ est localement au voisinage de M le lieu des zéros de la submersion $\det \circ L_{M^{-1}}$ ce qui en fait une sous-variété au voisinage de tout point.