Analyse Complexe, M&H Queffélec
Espaces de Hilbert et opérateurs, Beyon-Margaria

213, 234, 243, 245

Espaces de Bergman

Espace de Bergman $B^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dz < +\infty \right\}$
$= \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$.

C'est un espace préhilbertien lorsqu'on le munit du produit scalaire de $L^2(\mathbb{D})$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\, \overline{g(z)}\, dz .$$

Lemme : $\forall K$ compact de $\mathbb{D}$, $\forall f \in B^2(\mathbb{D})$, $\|f\|_{\infty, K} \leq \dfrac{\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}}{\sqrt{\pi} \cdot \mathrm{dist}(K, \mathbb{S}^1)}$.

Dém : comme $\mathbb{D}$ est ouvert, $\mathrm{dist}(K, \mathbb{S}^1) = \mathrm{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) > 0$.
Soit $a \in K$, comme $\mathbb{D}$ est ouvert, $\exists r > 0$ tq $D(a, r) \subset \mathbb{D}$.
D'après la formule de la moyenne :

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(a,r)} f(z) dz$$

Puis par Cauchy-Schwarz :

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \left(\int_{D(a,r)} |f(z)|^2 dz \right)^{1/2} \left(\int_{D(a,r)} dz \right)^{1/2}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi r^2}}{\pi r^2} \|f\|_{L^2(\mathbb{D})}$$
$$= \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}}{\sqrt{\pi}\, r}$$

On fait $r \longrightarrow \mathrm{dist}(a, \mathbb{S}^1)$: $|f(a)| \leq \dfrac{\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}}{\sqrt{\pi} \cdot \mathrm{dist}(a, \mathbb{S}^1)}$ et

comme $\mathrm{dist}(K, \mathbb{S}^1) \leq \mathrm{dist}(a, \mathbb{S}^1)$, on trouve le résultat. $\square$

Prop: $B^2(\mathbb{D})$ munie du p.s de $L^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert.

Dém: si (f_n) est de Cauchy dans $B^2(\mathbb{D})$, d'après le lemme précédent, on a pour tout compact K de $\mathbb{D}$:

$$\forall m, n, \quad \|f_n - f_m\|_{\infty, K} \leq \frac{\|f_n - f_m\|_{L^2}}{\sqrt{\pi}\, dist(K, S^1)}$$

Ainsi, sur tout compact, (f_n) est de Cauchy dans $C(K, \mathbb{C})$ qui est complet pour la norme uniforme, donc quitte à prendre des compacts emboîtés, il existe f continue sur $\mathbb{D}$ et limite uniforme sur tout compact de (f_n). D'après Weierstrass, f est holomorphe.
De plus, $L^2(\mathbb{D})$ est complet donc (f_n) admet une limite g dans $L^2(\mathbb{D})$. Or d'après le théorème de Riesz-Fischer, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict. $\nearrow$ tq $(f_{\varphi(n)})$ converge presque partout vers g. Ainsi $f = g$ presque partout sur $\mathbb{D}$ et $f \in L^2(\mathbb{D})$, d'où $f \in B^2(\mathbb{D})$. $\square$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $e_n : z \in \mathbb{D} \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$.

Prop: la famille (e_n) forme une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$.

Dém:
$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \bar{z}^n z^m \, dz$$
$$= \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \left(\int_{r=0}^{1} r^{1+n+m} \, dr \right) \underbrace{\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \, d\theta \right)}_{2\pi \, \delta_{n,m}}$$
$$= \frac{2\pi \sqrt{(n+1)(m+1)}}{(n+m+2)\pi} \delta_{n,m}$$
$$= \frac{2\pi (n+1)}{(2n+2)\pi} \delta_{n,m}$$
$$= \delta_{n,m}$$

Donc (e_n) est orthonormée.

Si maintenant $f \in B^2(\mathbb{D})$ est orthogonale à $\mathrm{Vect}(e_n)$, on note $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = 0$ par hyp.

Comme f est holomorphe sur $\mathbb{D}$, elle y est analytique et il existe $(a_n) \subset \mathbb{C}$ tq $\forall z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Alors
$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} \bar{z}^n f(z)\, dz \underset{(*)}{=} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r \to 1} \int_{|z|<r} \bar{z}^n f(z)\, dz$$
$$\underset{(**)}{=} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r \to 1} \sum_{k \geq 0} a_k \int_{|z|<r} \bar{z}^n z^k\, dz$$

où $(*)$ résulte de la convergence dominée et $(**)$ découle de la convergence normale de la série entière sur tout compact de $\mathbb{D}$.

Or par un nouveau changement polaire, on trouve que
$$\int_{|z|<r} \bar{z}^n z^k\, dz = \frac{2\pi r^{n+k+2}}{n+k+2} \delta_{n,k} = \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \delta_{n,k}$$

donc
$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r \to 1} \sum_{k \geq 0} a_k \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \delta_{n,k}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \cdot a_n \lim_{r \to 1} r^{2n+2}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\, a_n$$
$$= 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ donc $f = 0$ et (e_n) est bien une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$. $\square$