Exponentielle des matrices symétriques

Recasage: 155, 156, 158, 160

Référence: Mneimné, Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie, p61...

Théorème: l'application exp réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

① Mq l'image d'une matrice symétrique par exp est symétrique définie positive.
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$: A est diagonalisable en base orthonormée d'après le théorème spectral : $\exists P \in O(n)$, $\exists D$ diagonale réelle telles que $A = PD{}^tP$. On sait qu'alors $e^A = Pe^D\,{}^tP$ donc e^A est symétrique et ses valeurs propres sont les exponentielles des valeurs propres de A donc sont réelles >0. Ainsi $e^A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

② Surjectivité :
Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on sait que l'on dispose de $P \in O(n)$ tq $B = P.\mathrm{Diag}(\lambda_i).{}^tP$ avec les λ_i réels strictement positifs. On pose alors $A := P.\mathrm{Diag}(\ln(\lambda_i)).{}^tP$ matrice symétrique qui vérifie $e^A = P.\mathrm{Diag}(\exp(\ln(\lambda_i))).{}^tP = B$.

③ Injectivité : soient $A, \hat{A} \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $e^A = e^{\hat{A}}$
En particulier e^A et $e^{\hat{A}}$ ont les mêmes valeurs propres. Or les valeurs de e^A sont exactement les exponentielles des valeurs propres de A, idem pour $\hat{A}$ donc A et $\hat{A}$ ont les mêmes valeurs propres, disons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Il existe donc $P, Q \in O(n)$ et σ, σ' deux permutations de $[\![1,n]\!]$ telles que
$A = P.\mathrm{Diag}(\lambda_{\sigma(i)}).{}^tP$ et $\hat{A} = Q.\mathrm{Diag}(\lambda_{\sigma'(i)}).{}^tQ$.
Soit alors un polynôme interpolateur tel que $\Pi(e^{\lambda_i}) = \lambda_i \quad \forall i \in [\![1,n]\!]$.
On a alors $\Pi(e^A) = P.\mathrm{Diag}(\Pi(e^{\lambda_{\sigma(i)}})).{}^tP = P.\mathrm{Diag}(\lambda_{\sigma(i)}).{}^tP = A$
et de même $\Pi(e^{\hat{A}}) = \hat{A}$. Ainsi $A = \Pi(e^A) \underset{\text{car } e^A = e^{\hat{A}}}{=} \Pi(e^{\hat{A}}) = \hat{A}$ d'où l'injectivité.

④ Continuité : la série $\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge normalement donc uniformément sur toute boule $B(0,R)$ pour une norme matricielle. Donc exp est continue sur $B(0,R)$.

exp est donc continue sur $S_n(\mathbb{R})$.

⑤ Bicontinuité :

Soit $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (car $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Par bijectivité de l'exponentielle, on dispose d'une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et de $A \in S_n(\mathbb{R})$ telles que l'on ait $B_p = e^{A_p}$ et $B = e^A$.

L'objectif est de montrer que la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A ; on aura alors montré la continuité (séquentielle) de l'inverse de l'exponentielle.

On a $B_p \xrightarrow[p\to\infty]{} B$ donc en particulier $\|B_p\|_2 \xrightarrow[p\to\infty]{} \|B\|_2$ et comme B_p, B sont symétriques (auto-adjointes), $\|B_p\|_2 = \rho(B_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} \rho(B) = \|B\|_2$ i.e la plus grande vp de B_p converge vers la plus grande vp de B. Avec le même raisonnement sur $(B_p^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$ (B_p est inversible car dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$), la plus petite vp de B_p converge vers la plus petite vp de B (il y a continuité de l'application $B \mapsto B^{-1} = \det(B)^{-1}\,{}^t\mathrm{com}(B)$)

Les valeurs propres des B_p sont donc nécessairement contenues dans un compact de $\mathbb{R}_+^*$.

Les valeurs propres des A_p étant les logarithmes (réels) des vp des B_p, elles sont donc aussi contenues dans un compact de $\mathbb{R}$.

Or pour tout $p\in\mathbb{N}$, on dispose de $Q_p \in O(n)$ et D_p matrice diagonale réelle telles que $A_p = Q_p \cdot D_p \cdot {}^tQ_p$. Les suites $(Q_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(D_p)_{p\in\mathbb{N}}$ ainsi définies sont dans des compacts de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($O(n)$ et les matrices diagonales). La suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc une suite dans un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: elle admet au moins une valeur d'adhérence.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict. ↗ une extractrice tq $A_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to\infty]{} \tilde{A}$. Par continuité de l'exponentielle, $e^{\tilde{A}} = e^A$, puis par injectivité, $\tilde{A} = A$.

Ainsi $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite dans un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui admet une unique valeur d'adhérence, donc elle converge vers cette valeur d'adhérence, d'où $A_p \xrightarrow[p\to\infty]{} A$.

$\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est donc bicontinue, c'est bien un homéomorphisme. □

Compte tenu de la décomposition polaire, on en déduit par exemple $GL_n(\mathbb{R}) \underset{\text{homéo.}}{\simeq} O(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$