Enveloppe convexe de $O(n)$.

Recasage : 159, 160, 161, 181
Références : BMP, Objectif agrégation p97 - ZQ, Analyse pour l'agrégation p205

Lemme : (Théorème de Hahn-Banach géométrique, version affaiblie dans un Hilbert)

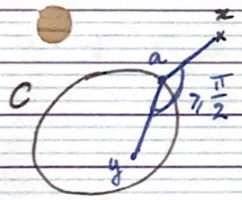
BMP

i) Soit $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert réel, C une partie (non vide) convexe fermée de H et $x \in H \setminus C$. Alors $\exists f \in H'$ tq $f(x) > \sup_{y \in C} f(y)$.

ZQ

ii) Soit $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un Hilbert réel et A une partie de E. Alors on a l'équivalence
$$x \in \overline{\mathrm{Conv}(A)} \iff \forall f \in H', \ f(x) \leq \sup_{y \in A} f(y).$$

Dém :



i) Soient $a = p_C(x)$ et $f = \langle x - a, \cdot \rangle$. Alors $f \in H'$ (avec $\|f\| = \|x-a\|$) et comme $x \notin C$, $x \neq a$ et $f(x-a) = \|x-a\|^2 > 0$ donc $f(x) > f(a)$.
D'autre part, le théorème de projection sur un convexe fermé donne la caractérisation : $\forall y \in C, \ \langle x-a, y-a \rangle \leq 0$

i.e $f(y) \leq f(a)$

donc $\sup_{y \in C} f(y) \leq f(a) < f(x)$ d'où $\sup_{y \in C} f(y) < f(x)$.

ii) On applique la contraposée de i) à $C = \overline{\mathrm{Conv}(A)}$: $x \in H$,
$$\forall f \in H', \ f(x) \leq \sup_{y \in C} f(y) \iff x \in C = \overline{\mathrm{Conv}(A)}.$$
sens évident

démo du ii) par ♡.

Il reste à montrer que $M_1 := \sup_{y \in C} f(y) = \sup_{y \in A} f(y) =: M_2$.

On a $A \subset \overline{\mathrm{Conv}(A)}$ donc $M_2 \leq M_1$.
Si $y \in \mathrm{Conv}(A)$: $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 1$ tq $\sum \lambda_i = 1$ et $a_1, \dots, a_n \in A$ tq $y = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.
Soit alors $f \in H'$, $f(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{f(a_i)}_{\leq M_2} \leq M_2$ donc $\sup_{y \in \mathrm{Conv}(A)} f(y) \leq M_2$

donc (comme f est continue) $\sup_{y \in \overline{\mathrm{Conv}(A)}} f(y) = M_1 \leq M_2$.

Donc $M_1 = M_2$ et $x \in \overline{\mathrm{Conv}(A)} \iff \forall f \in H', f(x) \leq \sup_{y \in A} f(y)$. ☐

Théorème: soient $n \in \mathbb{N}^*$, $|\cdot|_2$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \|M\| \leq 1\}$.

ZQ p 295

Alors $\mathrm{Conv}(O(n)) = B$.

Dém: * Comme $O(n)$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le théorème de Carathéodory qui caractérise $\mathrm{Conv}(O(n))$ donne immédiatement que $\mathrm{Conv}(O(n))$ est compacte i.e $x \in \overline{\mathrm{Conv}(O(n))} \iff x \in \mathrm{Conv}(O(n))$.

* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un espace de Hilbert.

car $U \in O(n)$ préserve la norme

* Si $U \in O(n)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|Ux|_2 = |x|_2$ donc $\|U\| \leq 1$ donc $U \in B$.
Donc $O(n) \subset B$ et comme B est convexe, $\mathrm{Conv}(O(n)) \subset B$.

voir détails

Lemme (admis): $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ est un isomorphisme.
$M \longmapsto \varphi_M : X \longmapsto \mathrm{Tr}(XM)$

Etant donné $X \in B$, d'après le lemme ii),

$$X \in \mathrm{Conv}(O(n)) \iff \forall f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*, f(X) \leq \sup_{Y \in O(n)} f(Y)$$

$$\underset{\text{lemme}}{\iff} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(XM) \leq \sup_{U \in O(n)} \mathrm{Tr}(UM).$$ nouvel objectif !

⚠ pas unicité si $M \notin GL_n(\mathbb{R})$ et S n'est pas dans S_n^{++}

* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème de décomposition polaire :
$\exists (U_0, S) \in O(n) \times S_n^+(\mathbb{R}) : M = U_0 S$.
Notons $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp de S et $(e_1, \dots, e_n)$ une bon de $\vec{vp}$.
Or U_0^{-1} est toujours dans $O(n)$ donc $\sup_{U \in O(n)} \mathrm{Tr}(UM) \geq \mathrm{Tr}(U_0^{-1}M)$
$= \mathrm{Tr}\, S$
$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

D'autre part $Tr(XM) = \sum_{i=1}^{n} \langle XMe_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle U_0 S e_i, X^* e_i \rangle$

$$\underset{C\text{-}S}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \|U_0 S e_i\| \cdot \|X^* e_i\|$$

$$\underset{\substack{\|\cdot\| \\ \text{norme} \\ \text{sub.}}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\|U_0 e_i\|}_{=\|e_i\|=1} \cdot \underbrace{\|X^*\|}_{=\|X\| \leq 1} \cdot \underbrace{\|e_i\|}_{=1}$$

car $U_0 \in O(n)$ préserve la $\|\cdot\|$.

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

donc $Tr(XM) \leq \sup_{U \in O(n)} Tr(UM)$ ce qui est le résultat voulu.

Donc $X \in Conv(O(n))$ i.e $B \subset Conv(O(n))$ d'où l'égalité. □

Démo lemme : * $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, φ_M est bien une forme linéaire (par linéarité de la trace et de $X \mapsto XM$) et on est en dimension finie donc $\varphi_M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* = \mathcal{L}_c(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

♡

Bref φ est bien définie et linéaire (encore par linéarité de la trace...)

* Si $\varphi_M = 0$ alors $\forall 1 \leq i, j \leq n$, $\varphi_M(E_{ij}) = Tr(E_{ij} M) = m_{ij} = 0$ donc $M = 0$ donc φ est injective et linéaire entre deux espaces de même dimension finie n^2 : φ est un isomorphisme. □

A compacte dans E de dim < ∞ => Conv A compacte

ZQ p 159

Comme $\dim E = d$, le théorème de Carathéodory donne que
$$Conv A = \{ \sum \lambda_j a_j : (\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}) \in \Delta, (a_1, \dots, a_{d+1}) \in A^{d+1} \}$$
où $\Delta = \{ (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}_+^{d+1} : \lambda_1 + \dots + \lambda_{d+1} = 1 \}$ est compact.
Ainsi $Conv A$ est compacte comme image du compact $\Delta \times A^{d+1}$ par l'application continue
$$\Delta \times A^{d+1} \longrightarrow E$$
$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}, a_1, \dots, a_{d+1}) \longmapsto \sum \lambda_j a_j$$

Théorème de Carathéodory : dans un espace affine de dimension n, l'enveloppe convexe d'une partie A est l'ensemble des barycentres à coefficients ≥ 0 de familles de $n+1$ points de A.

voir détails sur Wikipédia (ou Gourdon ?)

<u>Démo :</u> $\Gamma := \{ \sum \lambda_i a_i : 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \leq 1, \sum \lambda_i = 1$ et $a_1, \dots, a_{n+1} \in A \}$.
Il est clair que $\Gamma \subset \mathrm{Conv}(A)$.
Pour l'inclusion réciproque on montre que $\forall p \geq n+1$, si $x \in \mathrm{Conv}(A)$ est combinaison convexe de $p+1$ points de A, alors il est combinaison convexe de p points bien choisis parmi ces $p+1$; on réitère jusqu'à ce que $x \in \Gamma$.

Décomposition polaire (réelle) :

$$\begin{array}{ccc} O(n) \times S_n^+(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est surjective.} \\ (Q,S) & \longmapsto & QS \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & GL_n(\mathbb{R}) \text{ difféo.} \\ (Q,S) & \longmapsto & QS \end{array}$$

<u>Démo :</u> si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tMM$ est symétrique positive donc admet une unique racine carrée $S = \sqrt{{}^tMM} \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Si $M = QT$ avec $Q \in O(n)$ et $T \in S_n^+(\mathbb{R})$, on a ${}^tMM = {}^t(QT)QT = {}^tT\,{}^tQQT = T^2$ donc par unicité de la racine carrée dans $S_n^+(\mathbb{R})$, $T = S$.
Si M est inversible (donc S aussi), on pose $Q = MS^{-1}$ et on a ${}^tQQ = {}^t(S^{-1})\,{}^tMMS^{-1} = ({}^tS)^{-1}S^2S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$ ce qui conclut.
Si $M \notin GL_n(\mathbb{R})$, on l'approche par (M_n) dans $GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, on écrit $M_n = Q_nS_n$ leurs décompositions. Par BW on peut supposer que $Q_n \longrightarrow Q$. Alors $Q \in O(n)$ par continuité de $A \mapsto {}^tAA$ et la limite $Q^{-1}M$ des $Q_n^{-1}M_n = S_n$ est symétrique positive par continuité de $A \mapsto {}^tA$ et $A \mapsto {}^tXAX$. $\square$