Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$

I. Généralités [Gou]

1) Définitions et premières propriétés

Définition 1 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est symétrique (resp. antisymétrique) si ${}^tM = M$ (resp. ${}^tM = -M$).
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que M est hermitienne si ${}^t\overline{M} = M$.
On note : $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices ant-symétriques réelles et $H_n(\mathbb{C})$ des matrices hermitiennes

Notation 2 : Si le corps $\mathbb{K}$ n'est pas précisé, on notera $M^* = {}^tM$ si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M^* = {}^t\overline{M}$ si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exemple 3 :
1) $D_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})$
2) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & -2i \\ 1-i & 2i & 3 \end{pmatrix} \in H_n(\mathbb{C})$
3) Toute matrice complexe ayant un coefficient dans $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ sur la diagonale n'est pas dans $H_n(\mathbb{C})$.
4) Toute matrice réelle ayant un coefficient non nul sur la diagonale n'est pas anti-symétrique

Proposition 4 :
1) $S_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$
2) $H_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Toute matrice $M \in H_n(\mathbb{C})$ s'écrit de manière unique sous la forme $M = S + iA$, avec $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
$\dim_{\mathbb{R}}(H_n(\mathbb{C})) = n^2$.

Définition 5 : Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. M est dite symétrique positive (resp. définie positive) si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXMX \geq 0$ (resp. $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^tXMX > 0$). On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives).
Soit $M \in H_n(\mathbb{C})$. M est dite hermitienne positive (resp. définie pos.) si $\forall X \in \mathbb{C}^n$, ${}^t\overline{X}MX \geq 0$ (resp. $\forall X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, ${}^t\overline{X}MX > 0$). On note $H_n^+(\mathbb{C})$ (resp. $H_n^{++}(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices hermitiennes positives (resp. définies positives)

Proposition 6 : Les valeurs propres d'une matrice symétrique (resp. hermitiennes) sont réelles)

Proposition 7 : Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. M est symétrique positive (resp. définie positive) si, et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).
Soit $M \in H_n(\mathbb{C})$. M est hermitienne positive (resp. définie positive) si, et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives)

2) Formes associées [Gou]

Définition 8 : On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Une application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) si pour tout $y \in E$, $x \longmapsto \varphi(x,y)$ est linéaire et pour tout $x \in E$, $y \longmapsto \varphi(x,y)$ est linéaire (resp. antilinéaire, ie pour tous $y_1, y_2 \in E$, $\varphi(x, y_1+y_2) = \varphi(x,y_1) + \varphi(x,y_2)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi(x, \lambda y) = \bar{\lambda}\varphi(x,y)$).

Exemple 9 : $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt \end{array}$$
est une forme sesquilinéaire

Définition 10 : On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit φ une forme bilinéaire sur E. On dit que φ est symétrique (resp. antisymétrique) si $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ (resp. $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$).
On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit φ une forme sesquilinéaire. On dit que φ est hermitienne si $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}$

Exemple 10 : L'application φ de l'exemple précédent est une forme sesquilinéaire hermitienne.

Définition 11 : On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On appelle forme quadratique (resp. hermitienne) sur E toute application de la forme
$q : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x,x) \end{array}$ (resp. $\Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x,x) \end{array}$) où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E (resp. : forme sesquilinéaire hermitienne sur E).

Proposition 12 : On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ (resp forme sesquilinéaire hermitienne) sur E telle que pour tout $x\in E$, $q(x)=\varphi(x,x)$ (resp. $\Phi(x)=\Phi(x,x)$) et on a

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \varphi(x,y)=\frac{1}{2}\left[q(x+y)-q(x)-q(y)\right]=\frac{1}{4}\left[q(x+y)-q(x-y)\right].$$

(resp. $\varphi(x,y)=\frac{1}{4}\left[\Phi(x+y)-\Phi(x-y)+i\Phi(x-iy)-i\Phi(x+iy)\right]$).
Cette forme s'appelle la forme polaire associée à q (resp. Φ).

Définition 13 : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Soit q une forme quadratique sur E (resp. Φ une forme hermitienne sur E). On appelle matrice de q (resp. Φ) dans la base $B=(e_1,\dots,e_n)$ la matrice de sa forme polaire φ, $(\varphi(e_i,e_j))_{1\leq i,j\leq n}$. Le rang de q (resp. Φ) est le rang de la forme polaire associée.

Proposition 14 : Soit $\varphi : E\times E\to\mathbb{K}$ une forme bilinéaire (resp sesquilinéaire). φ est symétrique (resp hermitienne) si, et seulement si sa matrice $A=(\varphi(e_i,e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ dans une base $B=(e_1,\dots,e_n)$ de E est symétrique (resp. hermitienne)

Proposition 15 : Soit B une base de E. À tout vecteur $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ on associé le vecteur colonne $X=(x_i)_{1\leq i\leq n}$.
Soient φ une forme bilinéaire (resp forme sesquilinéaire) et A sa matrice dans la base B. Alors $\forall (x,y)\in E^2$, $X^*AY=\varphi(x,y)$.

Définition 16 : On appelle produit scalaire (ou produit scalaire hermitien) toute forme bilinéaire symétrique définie positive (resp. forme sesquilinéaire hermitienne définie positive) ie de matrice symétrique (resp. hermitienne) définie positive

Théorème 17 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient Φ une forme quadratique et φ sa forme polaire associée. Si Φ est positive, alors

$$\forall (x,y)\in E^2,\ |\varphi(x,y)|^2\leq \Phi(x)\Phi(y).$$

3) Orthogonalité

Φ désigne une forme quadratique (resp. forme hermitienne) de forme polaire φ.

Définition 18 : Deux vecteurs $x,y\in E$ sont dits orthogonaux selon Φ (ou selon φ) si $\varphi(x,y)=0$.
Soit A une partie de E. On appelle orthogonale de A selon Φ (ou φ) l'ensemble $A^\perp=\{y\in E,\ \forall x\in A,\ \varphi(x,y)=0\}$.

Remarque 19 : A n'est pas nécessairement un espace vectoriel. En revanche $A^\perp$ est un.

Proposition 20
1) si $F\subset E$, $F\subset(F^\perp)^\perp$
2) si $A\subset B\subset E$, $B^\perp\subset A^\perp$

Définition 21 : Une base B est dite Φ-orthogonale si pour tout couple d'éléments $(e,e')\in B^2$ distincts, $\varphi(e,e')=0$.

Remarque 22 : Si $B=(e_1,\dots,e_n)$ est une base Φ-orthogonale, alors pour tout $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$, $\Phi(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Phi(e_i)$.

II. Réduction et conséquences

1) Théorème spectral [GOU] [ROM]

Théorème 23 : Il existe une base Φ-orthogonale de E.

Corollaire 24 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^*=A$. Il existe une matrice inversible $P\in GL_n(\mathbb{K})$ telle que P^*AP soit une matrice diagonale

Théorème 25 (Spectral) Soit $M\in S_n(\mathbb{R})$ (resp. $M\in H_n(\mathbb{C})$).
Alors, il existe une matrice P orthogonale (resp. unitaire) telle que $C^{-1}MC=C^*MC$ soit diagonale réelle.

Théorème 26 : proposition 7 ici

Corollaire 27 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $A\in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $A\in H_n^+(\mathbb{C})$) si, et seulement si il existe $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$A=B^*B$

Théorème 28 : Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de matrices de $S_n(\mathbb{R})$
Il existe une matrice orthogonale P telle que pour tout $i\in I$, ${}^tPA_iP$ est diagonale si, et seulement si les A_i commutent deux à deux.

Application 29 : $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

2) Conséquences [Rom]

Théorème 30 : Soit $A \in S_n^{+}(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique matrice $B \in S_n^{+}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$

Théorème 31 : Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = \Omega S$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

L'application $\begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (\Omega, S) & \longmapsto & \Omega S \end{array}$ est un homéomorphisme

Application 32 : On suppose que E est euclidien. On note $B = \{u \in \mathcal{L}(E), |||u||| < 1\}$. Les points extrémaux de B (ie qui ne s'écrivent pas comme le milieu de deux points distincts) sont les éléments de $O(E)$.

Proposition 33 : Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \rho(A)$.

DEV1 **Théorème 34** : L'application exponentielle induit un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$

III. Applications

1) Ellipsoïde de John-Loewner [IP]

Définition 35 : Soient $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et q_S sa forme quadratique. L'ellipsoïde associé est l'ensemble $\mathcal{E}_S = \{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leq 1\}$.

Remarque 36 : On a donné la définition d'un ellipsoïde plein et centré en l'origine, ce qui correspond à la boule unité fermée pour la norme $\sqrt{q}$.

DEV2 **Théorème 37** Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K

2) Vecteurs gaussiens [RG]

Définition 38 : On dit que $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur gaussien si pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum \lambda_i X_i$ est une variable gaussienne

Exemple 39 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables gaussiennes indépendantes. Alors $X = (X_1, \dots, X_d)$ est un vecteur gaussien.

Définition 40 : Soit X un vecteur gaussien. On définit son vecteur moyenne par $m = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_n) \end{pmatrix}$ et sa matrice de covariance par $\Sigma = (Cov(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Théorème 41 : Soit X un vecteur gaussien. La loi de X est entièrement déterminée par son vecteur moyenne et sa matrice covariance. On l'appelle loi normale de paramètres m et Σ et on la note $\mathcal{N}(m, \Sigma)$

Remarque 42 : Σ est une matrice symétrique positive.

Théorème 43 : Soit X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, \Sigma)$. La loi de X admet une densité $f_{m,\Sigma}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si Σ est inversible. Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f_{m,\Sigma}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t(x-m)\Sigma^{-1}(x-m)\right)$$

Références

[Gou] Algèbre, Gourdon

[IP] Oral à l'agrégation de mathématiques, Isenman, Pecatte

[RG] Statistique mathématique en action, Ziovriard, Stoltz

[Rom] Algèbre et géométrie, Rombaldi