155

Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Cadre : $\mathbb{K}$-corps commutatif, E $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$

I. Généralités

1) Éléments propres [Ber]

Définition 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ est un vecteur propre de f s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Le scalaire λ est une valeur propre.
On appelle spectre de f, noté $Sp(f)$ l'ensemble de ses valeurs propres. Pour $\lambda \in Sp(f)$, on appelle sous-espace propre de f associé à λ l'espace $E_\lambda = Ker(f - \lambda Id_E)$ non réduit à $\{0\}$

Exemple 2 : Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. Alors $Sp(f) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
(α, β, γ) 2 à 2 $\neq$

$E_\alpha = \mathbb{K}e_1$, $E_\beta = \mathbb{K}e_2$, $E_\gamma = \mathbb{K}e_3$.

2) Polynômes d'endomorphismes [Ber]

Définition 3 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$
On pose $P(u) = a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0 Id_E \in \mathcal{L}(E)$.
où $u^k = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$ et $u^0 = Id_E$
Un endomorphisme de la forme $P(u)$ est appelé polynôme d'endomorphisme en u.
On note $\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Proposition 4 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $\omega_u : \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[u] \\ P \longmapsto P(u) \end{array}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres associatives et unitaires et $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Théorème-définition 5 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble
$I_u = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Il existe un unique polynôme unitaire $\mu_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I_u = (\mu_u) = \mu_u \mathbb{K}[X]$.
μ_u est appelé polynôme minimal de u et tout élément de I_u est appelé polynôme annulateur de u.

Définition 6 : On définit le polynôme caractéristique d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\chi_M = det(XI_n - M)$

Proposition 7 : Le polynôme caractéristique est invariant par similitude

Définition 8 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de u est le polynôme caractéristique d'une matrice de u dans une base quelconque

Exemple 9 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots\; 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors $\chi_M = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$

+ $E = F \oplus G$ si F et G sont stables par u, alors $\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}$

Lemme 10 (Décomposition des noyaux) : Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$,
$Ker((P_1 \cdots P_r)(u)) = Ker(P_1(u)) \oplus \dots \oplus Ker(P_r(u))$

Corollaire 11 : Les sous-espaces propres sont en somme directe

Théorème 12 (Cayley-Hamilton) : Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ $\chi_u(u) = 0$, ie $\mu_u \mid \chi_u$.

3) Liens entre polynômes d'endomorphismes et valeurs propres

Proposition 13 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les racines de χ_u sont exactement les valeurs propres de u.

Proposition 14 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(u)$. On note m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.
Alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$.

Proposition 15 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in Sp(u)$ $x \in E_\lambda$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
En particulier, si P annule u, λ est racine de P dans $\mathbb{K}$.

Corollaire 16 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les racines de μ_u sont exactement les valeurs propres de u

II. Diagonalisabilité

1) Définition

Définition 17 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable s'il existe dans E une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que la matrice de u dans cette base soit diagonale.
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables

Théorème 18 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres.

2) Critère de diagonalisabilité [Ber]

Théorème 19 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) u est diagonalisable
2) $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda$
3) Le polynôme χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$.

Corollaire 20 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u a n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable

Théorème 21 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) u est diagonalisable
2) $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)$ annule u
3) Il existe un polynôme P annulant u scindé à racines simples
4) μ_u est scindé à racines simples
5) $\mu_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)$

Application 22 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs avec sur la diagonale des blocs de la forme $\lambda_r I_r$. Alors M est diagonalisable

Application 23 : Théorème de Burnside
Soit G un groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini (ie il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall A \in G\ A^N = I_n$). Alors G est fini.

Exemple 24 : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable

3) Diagonalisation simultanée [Ber] [Coq]

Lemme 25 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u. Si u est diagonalisable, alors u_F est diagonalisable

DEV 1

Théorème 26 : Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux
Alors les u_i sont diagonalisables dans une même base.

Application 27 : Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments différents de I_n sont d'ordre 2. Alors G a au plus 2^n éléments et il existe un sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{K})$ ayant exactement 2^n éléments

4) Endomorphismes symétriques [Rom]

Définition 28 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique (ou auto-adjoint) si $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$. On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques

Proposition 29 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique

Lemme 30 : Les valeurs propres d'une matrice symétrique sont toutes réelles

Théorème 31 (Spectral) : Tout endomorphisme $u \in S(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée

Corollaire 32 : Toute matrice symétrique réelle $A \in S_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale

Définition 33 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique positif (resp. défini positif) s'il est symétrique avec $\forall x \in E$, $\langle x, u(x) \rangle \geq 0$ (resp. $\forall x \in E \setminus \{0\}$ $\langle x, u(x) \rangle > 0$).

Théorème 34 : $u \in S(E)$ est symétrique positif (resp défini positif) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp strictement positives)

Proposition 35 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. En munissant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme matricielle induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$
$\|A\| = \rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$.

Application 36 : L'application exponentielle induit un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$

III. Propriétés topologiques de $D_n(\mathbb{K})$. [Rom] [FGN]

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 37 : $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Proposition 38 : $D_n(\mathbb{C})$ n'est pas ouvert. $\mathring{D_n}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes.

Proposition 39 : L'adhérence de $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$

+ $S(A)$ classe de conjugaison de $A \in D_n(\mathbb{C})$ fermée

IV. Décomposition de Dunford [Gou]

DEV 2

Lemme 40 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme annulateur de u. $P = M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ est sa décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{K}[X]$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note

$N_i = \mathrm{Ker}(M_i^{\alpha_i}(u))$

Alors :

1) $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$

2) La projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en u

Théorème 41 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que

1) d est diagonalisable, n est nilpotente

2) $\varphi = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$

De plus d et n sont des polynômes en φ.

Application 42 : Calcul pratique

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \chi_M = (X-2)^2(X-3)$$

Alors $$p_1 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Références

[Ber] Algèbre : le grand combat, Berhuy

[Cog] Algèbre linéaire, Cognet

[FGN] Oraux X-ENS, Algèbre 2, FGN

[Gou] Algèbre, Gourdon

[Rom] Algèbre et géométrie, Rombaldi