Théorème de Lüroth

Thm : Soit K un corps et L une extension de K incluse dans $K(T)$ où T est une indéterminée, et distincte de K. Alors $\exists \alpha \in K(T)$, tq $L = K(\alpha)$ et α est K-transcendant

---

• T est L-algébrique : Soit $y \in L \setminus K$, $\exists P_0, Q_0 \in K[T]$, $Q_0 \neq 0$ $\max(d^\circ P_0, d^\circ Q_0) \geq 1$ tels que $y = \dfrac{P_0(T)}{Q_0(T)}$. Alors le polynome $P_0(X) - y\,Q_0(X) \in L[X]$ annule T.

• Soit $\phi(X) \in L[X]$, $\phi(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} \dots + a_0 \in L[X]$ son polynome L-minimal. On a $n = [K(T) : L]$

Écrivons $\forall i = 0 \dots n-1$, $a_i = \dfrac{B_i(T)}{B_n(T)}$ où les $B_0(T), \dots, B_n(T)$ sont premiers entre eux dans leur ensemble (et $B_n \neq 0$)

T étant K-transcendant, $\exists j \in [\![0, n-1]\!]$, $a_j \in L \setminus K$.

Soit $P(T, X) = B_n(T)\,\phi(X) = B_n(T)X^n + \dots + B_0(T) \in K[T, X]$ et soit $m = d^\circ_T P$ $(n = d^\circ_X P)$, On a : $\forall i = 0 \dots n$, $d^\circ B_i \leq m$.

• Le polynome $B_j(X) - a_j B_n(X)$ admet T pour racine il est donc divisible par $\phi(X)$ dans $L[X]$.

écrivons $B_j(X) - a_j B_n(X) = H(T, X)\,\phi(X)$ $H \in L[X]$

On pose $S(T, X) = B_n(T)B_j(X) - B_j(T)B_n(X) = H(T,X)\,P(T,X)$

• posons $H(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{q} \frac{C_i(T)}{D(T)} X^i$ avec $D, C_0, \dots, C_q \in K[T]$ $D \neq 0$

On obtient $D(T)\,S(T,X) = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{q} C_i(T)X^i\right) P(T,X)$

cette égalité ayant lieu dans $K[T][X]$.

En passant aux contenus, les coefficients de $P(T,X)$ devant X étant premiers entre eux dans leur ensemble

On a : $\forall i = 0 \dots q$, $D(T) \mid C_i(T)$

Ce qui signifie que $H(T,X) \in K[T,X]$

- On a : $d^o_T S \leq m = d^o_T P$

Mais $S = HP$ entraine $d^o_T S = m$, ce qui entraine $d^o_T H(T,X) = 0$, c'est à dire : $H(T,X) \in K[X]$.
$= H(X)$

- On a : $S(T,X) = -S(X,T)$ donc

$$H(X)\,P(T,X) = -H(T)\,P(X,T)$$

Par le même raisonnement que précédement avec les contenus, On a que $H(T)$ divise les coefficients de $H(X)$, c'est à dire que H est constant.

- On en déduit que $m = n$ ie $d^o_T P = d^o_X P$.
- On a $B_n(T)\,a_j - B_j(T) = 0$ donc T est racine de $B_n(X)\,a_j - B_j(X) \in L[X]$ et $d^o B_n, d^o B_j \leq m$ entraine $[K(T) : K(\alpha)] \leq m$ $\quad \alpha = a_j$.

alors : $n = m \geq [K(T) : K(\alpha)] = [K(T) : L]\cdot[L : K(\alpha)]$
$= n\,[L : K(\alpha)]$

D'où $[L : K(\alpha)] = 1$ et $L = K(\alpha)$

- α est K-transcendant car

$$\underbrace{[K(T) : K]}_{\text{infinie}} = \underbrace{[K(T) : K(\alpha)]}_{\text{finie}} \cdot \underbrace{[K(\alpha) : K]}_{\text{forcément infinie.}}$$

leçons $K(X)$, extensions de corps

exercice : ~~Cara~~ Déterminer $L = \{ F \in K(T) \,/\, F(T) = F(\frac{1}{T}) \}$