Formule des compléments

Thm : On pose, pour $z \in \mathbb{C}$ tq $Re(z) > 0$, $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

$\left(\Gamma(1) = 1, \ \forall z \in \mathbb{C} / Re(z) > 0, \ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \ \left| \begin{array}{l} \Gamma(n) = (n-1)! \\ \forall n \geq 1 \end{array} \right. \right.$

et $\Gamma(z)$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} / Re(z) > 0\}$)

On a : $\forall z \in \mathbb{C}, 0 < Re(z) < 1, \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$

---

lemme : Si $\alpha \in]0;1[$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$

- Soit $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$. $t \longmapsto t^{-\alpha}(1+t)^{-1}$ est positive

et $\dfrac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ intégrable (car $\alpha < 1$) en 0

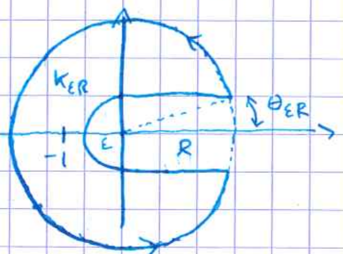
$\underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ intégrable (car $\alpha > 0$) en $+\infty$

- Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ et $f : z \in \Omega \setminus \{-1\} \longmapsto \dfrac{1}{z^\alpha(1+z)}$

(on pose $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ si $z = re^{i\theta}$ et $\theta \in]0;2\pi[$).

f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{-1\}$ et possède un pôle simple en -1. On a de plus $\text{Rés}(f,-1) = \dfrac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$

- Si ε, R sont tq $0 < \varepsilon < 1 < R$, on note $K_{\varepsilon R}$ le compact



$(-1) \in K_{\varepsilon R}$ donc via le thm. des résidus :

$$\int_{\partial K_{\varepsilon R}} f(z)\,dz = 2i\pi \,\text{Rés}(f,-1) = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$$

- Soit C_ε le petit demi-cercle. on a $\left| \displaystyle\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz \right| \leq \dfrac{\pi\varepsilon}{\varepsilon^\alpha(1+\varepsilon)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

- Soit $\Gamma_{\varepsilon R}$ le grand demi-cercle. on a :

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon R}} f(z)\,dz = \int_{\theta=\theta_{\varepsilon R}}^{2\pi - \theta_{\varepsilon R}} iR^{1-\alpha} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha\theta}} \times \frac{1}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta \underset{\text{cgence dominée}}{\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{}} \int_0^{2\pi} iR^{1-\alpha} \frac{e^{i(1-\alpha)\pi\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta$$

• Soient $I^+_{\varepsilon R}$, $I^-_{\varepsilon R}$ les deux segments horizontaux $\frac{I^+_{\varepsilon R}}{I^-_{\varepsilon R}}$

si $t>0$, $t+i\varepsilon \in I^+_{\varepsilon R}$ vérifie $(t+i\varepsilon)^\alpha \xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}]{} t^\alpha$

et $t-i\varepsilon \in I^-_{\varepsilon R}$ est tq $(t-i\varepsilon)^\alpha \xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}]{} e^{i\pi\alpha} t^\alpha$

la majoration $\forall y \in \mathbb{R}$, $|f(t+iy)| \leq f(t)$ permet d'appliquer le thm. de cgence dominée quand $\varepsilon \to 0$ pour obtenir :

$$\int_{I^+_{\varepsilon R}} f(z)\,dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^R f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_{I^-_{\varepsilon R}} f(z)\,dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} e^{-2i\pi\alpha}\int_0^R f(t)\,dt$$

• On a donc, $\forall R>1$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_{\varepsilon R}} f(z)\,dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha} = \left(1-e^{-2i\pi\alpha}\right)\int_0^R f(t)\,dt + i\int_0^{2\pi} R^{1-\alpha}\frac{e^{i(1-\alpha)\pi\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta$$

$\hookrightarrow$ si $\theta\in[0;2\pi]$, $\left|R^{1-\alpha}\frac{e^{i(1-\alpha)\pi\theta}}{1+Re^{i\theta}}\right| \leq \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

donc l'intégrale la plus à droite tend vers 0 par | cgence dominée

On obtient : $$I_\alpha = \frac{2i\pi e^{-i\pi\alpha}}{1-e^{-2i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

• Retour au thm : Pour Mq $\forall z\in\mathbb{C} / \mathrm{Re}(z)\in]0;1[$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

il suffit de le faire $\forall z\in]0;1[$ par le prolongement analytique.

• Via Fubini-Tonnelli : $\forall \alpha\in]0;1[$,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+^{*2}} t^{\alpha-1}s^{-\alpha}e^{-(s+t)}\,dt\,ds = \int_{\mathbb{R}_+^{*2}}\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha e^{-(s+t)}\,ds\,\frac{dt}{t}$$

On effectue le changement de variable $\begin{cases} u = s+t \\ v = t/s\end{cases}$

de valeur absolue de jacobien $\frac{t}{(1+v)v}$

On en déduit :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+^{*2}} \frac{v^\alpha}{(1+v)v} e^{-u}\,du\,dv$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-u}\,du \int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{dv}{(1+v)v^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\pi(1-\alpha)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

et le résultat.