

leçons:
 102: groupe des nombres complexes de module 1.
 103: exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de quotient
 107: Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-ev

Tables de caractères et sous-groupes distingués

(44)

Référence: Gabriel Peyre "L'algèbre discrète de la transformation de Fourier" page 230

Thm: Soit G un groupe fini et soient ρ_i (resp. χ_i) ($1 \leq i \leq n$) les représentations irréductibles (resp. les caractères associés) de G sur V_i .

On pose $K_{\chi_i} = \{g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(1)\}$

Alors les sous-groupes distingués de G sont exactement les $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ pour $I \subset \{1, \dots, n\}$, $I \neq \emptyset$ et $K_{\chi_i} = \text{Ker } \rho_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

preuve:

① MQ les K_{χ_i} sont des sous-groupes distingués de G (les intersections seront également des sous-groupes distingués)

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et $g \in G$

$g^{|G|} = 1$ et ρ_i morphisme donc $\rho_i(g)^{|G|} = \text{id}_{V_i}$.

On en déduit que $\rho_i(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de $X^{|G|} - 1$ donc des racines de l'unité. Il y en a $\dim V_i = \chi_i(1)$ complètes avec multiplicité. Notons $(\lambda_j^{(i)}(g))_{1 \leq j \leq \chi_i(1)}$ ces valeurs propres.

On a $\chi_i(g) = \text{Tr } \rho_i(g) = \sum_{j=1}^{\chi_i(1)} \lambda_j^{(i)}(g)$
 $|\chi_i(g)| \leq \sum_{j=1}^{\chi_i(1)} |\lambda_j^{(i)}(g)| \leq \sum_{j=1}^{\chi_i(1)} 1 = \chi_i(1)$ par inégalité triangulaire

Ainsi $\chi_i(g) = \chi_i(1) \iff \forall j \in \{1, \dots, \chi_i(1)\} \lambda_j^{(i)}(g) = 1$ (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire les $\lambda_j^{(i)}(g)$ sont positivement réels donc positionnés sur une même demi-droite)
 $\iff \rho_i(g) = \text{id}$
 $\iff g \in \text{Ker } \rho_i$

D'où $K_{\chi_i} = \text{Ker } \rho_i$ et K_{χ_i} est un sous-groupe distingué de G .

② MQ un sous-groupe distingué est de cette forme

Soit $N \triangleleft G$ et ρ la représentation régulière de G/N de degré $|G/N|$ sur U .
 On pose $\tilde{\rho}: G \rightarrow GL(U)$ où $\pi: G \rightarrow G/N$ est la projection canonique
 $\left\{ \begin{array}{l} g \mapsto \rho(\pi(g)) \end{array} \right.$

$\tilde{\rho}$ est une représentation de G

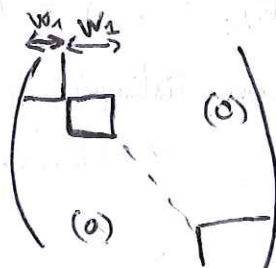
De plus $\text{Ker } \tilde{\rho} = \{g \in G \mid \rho(\pi(g)) = \text{id}\}$
 $= \{g \in G \mid \pi(g) = 1\}$ car ρ est injective
 $= N$

D'où $N = \text{Ker } \tilde{\rho} = K_{\tilde{\chi}}$ où $\tilde{\chi}$ est le caractère associé à $\tilde{\rho}$

Décomposition en représentations irréductibles de U :

$$U = \bigoplus_{W_i \in \mathcal{I}} W_i^{n_i}$$

Dans une base adaptée, $\tilde{\rho}(g)$ s'écrit



D'où $K_{\tilde{\chi}} = \text{Ker } \tilde{\rho}$
 $= \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \text{Ker } (\rho_i)$ où $\mathcal{I} = \{i \mid W_i \text{ apparaît dans la décomposition en irréductible de } \tilde{\rho}\}$
 $= \bigcap_{i \in \mathcal{I}} K_{\chi_i}$ par ① \square

Corollaire: Soit G un groupe, de caractères irréductibles χ_i .
 Alors G est simple si et seulement si $\forall i \neq 1 \forall g \in G \setminus \{1\} \chi_i(g) \neq \chi_i(1)$

preuve:
 Si il existe $i \neq 1, g \in G \setminus \{1\}$ tq $\chi_i(g) = \chi_i(1)$, alors $\text{Ker } \rho_i = K_{\chi_i}$ est un sous-groupe distingué non trivial de G . Donc G n'est pas simple.

Réciproque: Si G n'est pas simple, il existe $g \neq 1$ dans un certain sous-groupe distingué non trivial N de G .

On pose $N = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} K_{\chi_i}$

Si $i \in \mathcal{I} \setminus \{1\}$, on a $\chi_i(g) = \chi_i(1)$.