6 Calcul de l'intégrale de Gauss

6.1 Première version par une équation différentielle

Lemme. $\forall a > 0, \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Démonstration.
La fonction $x \mapsto e^{-ax^2}$ est pair, et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $e^{-ax^2} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$) donc sur $\mathbb{R}$.
Posons les fonctions $\phi :\ [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\phi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $f(t,x) := \dfrac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$.
• On va montrer que ϕ vérifie une certaine équation différentielle. On ne peut pas utiliser le théorème de dérivation de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car même en prenant $g(x) = \sup_{t\in]0,+\infty[} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ on obtient $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ qui n'est pas intégrable. La dérivée étant une propriété locale, il suffit de montrer que ϕ est dérivable sur tout intervalle $]a, b[$ avec $0 < a < b$:

i) $\forall t \in\ [0, +\infty[,\ x \mapsto f(t,x)$ est intégrable car $f(x,t) \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$, en particulier $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $]a, b[$.

ii) $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -\dfrac{x^2e^{-tx^2}}{1+x^2}$ (en particulier sur $]a, b[$).

iii) $\forall t \in]a, b[,\ \left|\dfrac{x^2e^{-tx^2}}{1+x^2}\right| \leq \left|e^{-tx^2}\right| \leq e^{-ax^2}$ qui est intégrable.

Le théorème s'applique donc $\forall\, 0 < a < b$, $\forall t \in]a, b[$ ϕ est dérivable et $\phi'(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2e^{-tx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
Ce qui est donc vrai pour tout t dans $\mathbb{R}$.
• $\phi'(t) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2e^{-tx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+1)e^{-tx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
$= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2}\,\mathrm{d}x + \phi(t) = \frac{I}{\sqrt{t}} + \phi(t)$ où $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ (changement de variable $u = x\sqrt{t}$).
On peut résoudre cette équation différentielle sur $]0, +\infty[$ et $\forall y > 0$:

$$\forall t \in]0, +\infty[,\ \phi(t) = \phi(y)e^t - \left(\int_y^t \frac{I}{\sqrt{u}}e^{-u}\,\mathrm{d}u\right)e^t$$

Or ϕ est continue en 0, en faisant tendre y vers 0 on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \phi(t) = \phi(0)e^t - \left(\int_0^t \frac{I}{\sqrt{u}}e^{-u}\,\mathrm{d}u\right)e^t$$

On écrit : $\displaystyle\int_0^t \frac{I}{\sqrt{u}}e^{-u}\,\mathrm{d}u = 2I\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (changement de variable $x = \sqrt{u}$).
Avec $\phi(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$, on obtient $\phi(t) = \left(\pi - 2I\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)e^t$.
• Or $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\phi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{I}{\sqrt{t}}$ donc $\phi(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, on en déduit que : $2I\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} \pi$, et comme $2I\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} 2I\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}I$ on a : $\pi = I^2$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.
D'où le résultat par changement de variable ($u = \frac{x}{\sqrt{a}}$ pour $a > 0$). □

Remarque. Ne fait pas parti de ma liste finale de développements.

Références. CANDELPERGHER, *Calcul intégral* pages 46.

6.2 Deuxième version par changement en coordonnées polaire

Lemme. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$

Démonstration.
On pose $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, cette intégrale est fini car $e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$. Par Fubini, les fonctions intégrées étant positives on obtient que :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Soit φ le $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array}$, par changement de variables $(r,\theta) \mapsto (x,y)$:

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]} e^{-r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}|J_{\varphi(r,\theta)}|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

En effet, $J_{\varphi(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r\cos(\theta) & \frac{\partial}{\partial r} r\sin(\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} r\cos(\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta} r\sin(\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)) = r$ Par Fubini, on obtient :

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-r^2}\,\mathrm{d}r \times \int_{[0,2\pi]} \mathrm{d}\theta = 2\pi \times \left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

On obtient ainsi $I = \sqrt{\pi}$. □

Références.
Voir GOURDON, *Les maths en tête : analyse : mathématiques pour MP**, page 335 pour des idées.