P. Maurer

ENS Rennes

Recasages : *203, 205, 220, 221, 226.*

Référence : *Analyse numérique et équations différentielles, Demailly.*

Théorème de Cauchy-Lipschitz

On propose deux versions du théorème : la version générale locale, qui convient dans les leçons 205 et 220, et la version linéaire, qui convient dans la leçon 221.

On démontre également le théorème du point fixe de Banach-Picard, qui justifie le recasage dans la leçon 226 (dans cette leçon, on pourra plutôt traiter la version globale de Cauchy-Lipschitz, qui est plus rapide).

1 Théorème du point fixe de Banach-Picard

Définition 1. *Soit (X,d) un espace métrique. On dit qu'une application $f\colon X\to X$ est contractante s'il existe $k\in[0,1[$ tel que $\forall x,y\in X \quad d(f(x),f(y))<k\cdot d(x,y)$.*

Théorème 2. *(Point fixe de Banach-Picard)*

Soit (X,d) un espace métrique complet, et $f\colon X\to X$ une application contractante. Alors f admet un unique poit fixe $x\in X$. De plus, toute suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0\in X$ et $x_{n+1}=f(x_n)$ converge vers x.

Démonstration.

$\boxed{!}$ On suppose que f admet x et y pour point fixe. Comme f est k-contractante, on a

$$\begin{aligned} d(x,y) &< kd(f(x),f(y)) \\ &= kd(x,y). \end{aligned}$$

Donc $d(x,y)=0$. Aussi, on en déduit que $x=y$.

$\boxed{\exists}$ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X définie par $x_0\in X$ et $x_{n+1}=f(x_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On va montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soit et $p>q\geq 1$. L'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned} d(x_p,x_q) &\leq d(x_p,x_{p-1})+\cdots+d(x_{q+2},x_{q+1})+d(x_{q+1},x_q) \\ &= d(f^{p-q-1}(x_{q+1}),f^{p-q-1}(x_q))+\cdots+d(f(x_{q+1}),f(x_q))+d(x_{q+1},x_q) \\ &< k^{p-q-1}\,d(x_{q+1},x_q)+\cdots+k\,d(x_{q+1},x_q)+d(x_{q+1},x_q) \\ &= \sum_{i=0}^{p-q-1} k^i\times d(x_{q+1},x_q) \\ &< \sum_{i=0}^{p-q-1} k^i\cdot k^q\cdot d(x_1,x_0). \\ &= k^q\cdot\frac{1-k^{p-q}}{1-k}\cdot d(x_1,x_0) \\ &\leq \frac{k^q}{1-k}\,d(x_1,x_0). \end{aligned}$$

La suite $(k^q)_{q\geq 1}$ est géométrique de raison $k\in[0,1[$, donc elle converge vers zéro. On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Par ailleurs, l'espace (X,d) est supposé complet, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $x_0\in X$, qui vérifie $f(x_0)=x_0$ par continuité de f (puisque contractante implique continue). Par unicité du point fixe de f, on en déduit $x_0=x$. □

Corollaire 3. *(Théorème du point fixe généralisé)*

Soit (X,d) un espace métrique complet, et $f\colon X\to X$ une application. On suppose qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $f^n:=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ fois}}$ soit contractante. Alors f admet un unique point fixe.

Démonstration.

$\boxed{!}$ On suppose que x et y sont des points fixes de f. Par récurrence immédiate sur $n\in\mathbb{N}^*$, on obtient $f^n(x)=f(x)=x$ et $f^n(y)=f(y)=y$, donc l'unicité du point fixe de f^n donnée par le théorème de Banach-Picard permet d'affirmer que $x=y$.

$\boxed{\exists}$ Le théorème de Banach-Picard assure l'existence d'un point fixe $x\in X$ de la fonction f^n. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(f^n(x)) \\ &= f^n(f(x)). \end{aligned}$$

Aussi, $f(x)$ est un point fixe de f^n. Puisque f^n a un unique point fixe, on en déduit $f(x)=x$.

□

2 Théorème de Cauchy-Lipschitz local

Définition 4. *(Problème de Cauchy et type de solutions)*

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f\colon I\times\Omega\to\mathbb{R}^m$ une application continue. On considère le problème de Cauchy suivant

$$(\mathcal{P})\colon \begin{cases} x'(t)=f(t,x(t)) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

- *On appelle solution locale au problème $(\mathcal{P})$ tout couple (J,x), où $J\subset I$ est un voisinnage de t_0 et $x\colon J\to\Omega$ est dérivable, et vérifie les équations de $(\mathcal{P})$.*
- *Si (J,x) et $(\tilde{J},\tilde{x})$ sont des solutions locales de $(\mathcal{P})$, on dit que $(\tilde{J},\tilde{x})$ prolonge (J,x) si $J\subset\tilde{J}$ et si $\tilde{x}$ coïncide avec x sur J.*
- *On dit qu'une solution locale (J,x) est maximale si elle n'a pas d'autre prolongement qu'elle même.*

Théorème 5. *(Théorème de Cauchy-Lipschitz local)*

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f\colon I\times\Omega\to\mathbb{R}^m$ une application continue et localement lipschitzienne en sa seconde variable.

Si $t_0\in I$ et $x_0\in\Omega$ sont fixés, alors le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P})\colon \begin{cases} x'(t)=f(t,x(t)) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale.

Démonstration.

Etape 1 : **construction d'un cylindre de sécurité.**

Puisque f est localement lipschitzienne, il existe un voisinnage $J \times W$ de (t_0, x_0) telle que f soit lipschitzienne sur $J \times W$.

Par ailleurs, $J \times W$ est un ouvert, donc il existe un cylindre $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B(x_0, r_0)}$ qui soit inclu dans $J \times W$, lui même inclu dans $I \times \Omega$. Ce cylindre est un compact sur lequel f est continue : elle y est donc bornée par une constante $M \in \mathbb{R}_+$.

Soit $T \leq T_0$ et (x, I_0) une solution locale de $(\mathcal{P})$ vérifiant $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$. Supposons qu'elle sorte du cylindre $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B(x_0, r_0)}$ au temps $\tau \in I_0 \cap [t_0, t_0 + T]$, i.e :

$$\tau = \sup \left\{t \in I_0 \cap [t_0, t_0 + T] \, : \, x(t) \in \overline{B(x_0, r_0)}\right\}$$

Par continuité de x, on a $\|x(\tau) - x_0\| = r_0$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \|x(\tau) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{\tau} x'(t) \, dt \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{\tau} \|f(t, x(t))\| \, dt \\ &\leq MT. \end{aligned}$$

Donc en choisissant $T \leq \min \left\{T_0, \dfrac{r_0}{2M}\right\}$, on s'assure que $x(t)$ reste dans la boule fermée $\overline{B(x_0, r_0)}$ pour $t \in I_0 \cap [t_0, t_0 + T]$.

On vérifie qu'avec ce même choix de T, $x(t)$ reste aussi dans $\overline{B(x_0, r_0)}$ pour $t \in I_0 \cap [t_0 - T, t_0]$.

Avec T ainsi choisi, $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B(x_0, r_0)}$ constitue notre cylindre de sécurité.

Etape 2 : existence locale de la solution.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ et à valeurs dans $\overline{B(x_0, r_0)}$. $\mathcal{F}$ est une partie fermée de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^m)$ qui est complet, donc $\mathcal{F}$ est un espace métrique complet.

On considère la fonctionnelle Φ définie de la manière suivante :

$$\Phi \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\ x & \mapsto & \Phi(x) \colon \left\{ \begin{array}{ccc} [t_0 - T, t_0 + T] & \to & \overline{B(x_0, r_0)} \\ t & \mapsto & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \, ds \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On se donne K une constante de Lipschitz pour f et on écrit, pour $(x, y) \in \mathcal{F}^2$ et $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$:

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) \, ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \, ds \\ &\leq K \int_{t_0}^{t} \|x(s) - y(s)\| \, ds \\ &\leq K \, |t - t_0| \, \|x - y\|_{\infty} \, ds. \end{aligned}$$

On montre alors par récurrence sur $k \geq 1$ que

$$\begin{aligned} \|\Phi^k(x)(t) - \Phi^k(y)(t)\| &\leq K^k \frac{|t-t_0|^k}{k!} \|x-y\|_\infty \\ &\leq \frac{K^k T^k}{k!} \|x-y\|_\infty. \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ donc on a $\|\Phi^k(x) - \Phi^k(y)\|_\infty \leq \frac{K^k T^k}{k!} \|x-y\|_\infty$.

Puisque $\frac{K^k T^k}{k!} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$, il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que Φ^{k_0} soit contractante.

D'après le théorème du point fixe de Banach-Picard (dans sa version généralisée), comme $\mathcal{F}$ est un espace métrique complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, ceci implique que Φ admet un unique point fixe x^* défini sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Etape 3 : unicité locale.

Soit (J, x) et (I, y) deux solutions locale du problème de Cauchy $(\mathcal{P})$. En particulier, x et y vérifient $x(0) = y(0) = x_0$. Montrons par exemple que $x(t) = y(t)$ pour tout $t \in I \cap J$ supérieur ou égal à t_0.

Si cela n'est pas vérifié, on peut considérer

$$\tau := \inf \{t \in I \cap J \,:\, t \geq t_0 \text{ et } y(t) \neq x(t)\}.$$

Par définition, on a $x(t) = y(t)$ pour tout $t \in I \cap J$ inférieur à τ. La continuité de x et y permet d'affirmer que $x(\tau) = y(\tau)$.

Notons $x_1 := x(\tau)$, et donnons nous un cylindre de sécurité $C_1 = [\tau - T_1, \tau + T_1] \times \overline{B(x_1, r_1)}$ pour le problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$: $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(\tau) = x_1 \end{cases}$.

On a démontré à l'étape précédente qu'il existe une unique solution à $(\mathcal{P}_1)$ sur $[\tau - T_1, \tau + T_1]$ donc $x(t) = y(t)$ sur $[\tau, \tau + T_1]$: ceci contredit la définition de τ.

Etape 4 : construction de la solution maximale.

On considère $\Theta = \bigcup_{(J,x) \in S} J$, où S est l'ensemble des solutions locales du problème de Cauchy $(\mathcal{P})$. On définit alors x^* sur Θ par $x^*(t) = x(t)$ dès que $(J, x) \in S$, ce qui est légitime d'après l'unicité locale démontrée à l'étape 3.

□

3 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Théorème 6. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b : I \to \mathbb{R}^n$ deux applications continues, et $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Alors le problème de Cauchy*

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x'(t) = A(t)\, x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.

Démonstration.

Etape 1 : cas où $I=[a,b]$.

On suppose dans un premier temps que I est un segment. On pose alors $I=[a,b]$, et on note $M\in\mathbb{R}_+$ un réel tel que $\sup\limits_{t\in[a,b]}\|A(t)\|\leq M$. On considère la fonctionnelle Φ définie sur $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$ par

$$\Phi\colon\begin{cases}\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^n)\\ x & \mapsto & \Phi(x)\colon\begin{cases} I & \to & \mathbb{R}^n\\ t & \mapsto & x_0+\displaystyle\int_{t_0}^t (A(s)\,x(s)+b(s))ds\end{cases}\end{cases}$$

On remarque qu'une fonction $x\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$ est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si $\Phi(x)=x$, si et seulement si x est un point fixe de Φ. On se donne $(x,y)\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$.

Montrons par récurrence que pour tout $k\geq 1$, on a $\|\Phi^k(x)-\Phi^k(y)\|_\infty\leq\dfrac{M^k\cdot|t-t_0|^k}{k!}\|x-y\|_\infty$.

- **Initialisation** : pour $k=1$, on a pour tout $t\in I$:

$$\begin{aligned}\|\Phi(x)(t)-\Phi(y)(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^t (A(s)\,x(s)+b(s))-((A(s)\,y(s)+b(s))ds)ds\right\|\\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\,(x(s)-y(s))\|\,ds\\ &\leq M\cdot\sup_{s\in[a,b]}\|x(s)-y(s)\|\cdot|t-t_0|\\ &\leq M\cdot|t-t_0|\cdot\|x-y\|_\infty.\end{aligned}$$

  Ceci étant vrai pour tout $t\in I$, on en déduit que $\|\Phi(x)-\Phi(y)\|_\infty\leq M\cdot|t-t_0|\cdot\|x-y\|$ par passage à la borne supérieure.

- **Hérédité** : on suppose l'hypothèse vraie pour un certain $k\geq 1$. Soit $t\in I$, on a

$$\begin{aligned}\|\Phi^{k+1}(x)-\Phi^{k+1}(y)\|_\infty &\leq \int_{t_0}^t\|A(s)\,(\Phi^k(x)(s)-\Phi^k(y)(s))\|\,ds\\ &\underset{H.R.}{\leq} \int_{t_0}^t M\cdot\frac{M^k\cdot|t-t_0|^k}{k!}\|x-y\|_\infty\,ds\\ &\leq \frac{M^{k+1}}{k!}\|x-y\|_\infty\cdot\int_{t_0}^t|t-t_0|^k\,dt\\ &= \frac{M^{k+1}}{k!}\|x-y\|_\infty\cdot\frac{|t-t_0|^{k+1}}{k+1}\\ &= \frac{M^{k+1}\cdot|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\|x-y\|_\infty.\end{aligned}$$

  On en déduit que $\|\Phi^{k+1}(x)-\Phi^{k+1}(y)\|_\infty\leq\dfrac{M^{k+1}\cdot|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}\|x-y\|_\infty$, et ceci conclut la récurrence.

On obtient alors, pour tout $k\geq 1$, $\|\Phi^k(x)-\Phi^k(y)\|_\infty\leq\dfrac{M^k\cdot(b-a)^k}{k!}\|x-y\|_\infty$

Puisque $\dfrac{M^k\cdot(b-a)^k}{k!}\underset{k\to+\infty}{\to}0$, il existe donc $k_0\in\mathbb{N}^*$ tel que Φ^{k_0} soit contractante.

D'après le théorème du point fixe de Banach-Picard (dans sa version généralisée), comme $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$ est un espace métrique complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, ceci implique que Φ admet un unique point fixe sur I, qui constitue donc l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ sur I

Etape 2 : unicité et existence dans le cas général

Dans le cas où I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, on se donne une suite exhaustive de compacts $(K_m)_{m\geq 1}$ contenant t_0, vérifiant $K_m \subset I$ et $K_m \subset K_{m+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ainsi que $\bigcup\limits_{m\geq 1} K_m = I$.

Pour $m \geq 1$, l'étape 1 montre qu'il existe une unique solution $x_m \in \mathcal{C}^0(K_m, \mathbb{R}^n)$ au problème de Cauchy $(\mathcal{P})$.

- **Unicité** : soit $x \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ et $y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ deux solutions de $(\mathcal{P})$.

  Alors, pour $t \in I$ et $m \geq 1$ tel que $t \in K_m$, on a $x_{|K_m} = x_m$ et $y_{|K_m} = x_m$, donc $x(t) = y(t) = x_m(t)$. Ceci est vrai pour tout $t \in I$ donc $x = y$.

- **Existence** : pour $t \in I$, on définit $x(t) = x_\ell(t)$, où $\ell := \min\{m \geq 1 \,:\, t \in K_m\}$. La fonction x est bien définie d'après l'unicité des solutions sur chaque K_m : elle constitue donc une solution à $(\mathcal{P})$ sur I tout entier.

$\square$