Équation de la chaleur sur le cercle (35)

Thm : Soit $\mathbb{U}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$. et $u_0 \in L^2 = L^2(\mathbb{U})$,
Alors il existe une unique $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \to \mathbb{C}$, C^2, telle que $\begin{cases} \partial_t u = \Delta_x u \\ u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{L^2} u_0 \end{cases}$. De plus u est C^∞.
($\mathbb{U} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$)

1) Unicité : • Soit u une telle fonction. Soit $t>0$. ~~On~~ $u(t,\cdot)$ étant C^1, sa série de fourier cge normalement sur $\mathbb{U}$ vers $u(t,\cdot)$. Notons $c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}\,dx$ ses coefficients de Fourier ($n\in\mathbb{Z}$).

• Soient $0<a<b$ deux réels, $\partial_t u$ est bornée sur $[a,b]\times\mathbb{U}$ qui est compact. Ainsi $|\partial_t u(t,x)| \leq \|\partial_t u\|_{\infty,[a,b]\times\mathbb{U}}$ et cette dernière majoration permet d'appliquer les théorèmes de dérivation sous le signe $\int$ pour en déduire que c_n est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+^*, \forall n\in\mathbb{N}$, :

$$c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_t u(t,x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta_x u(t,x)e^{-inx}\,dx$$

$$\underset{IPP\times 2}{=} \frac{-n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}\,dx = -n^2 c_n(t).$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{Z}, \exists \overset{\circ}{c}_n\in\mathbb{C}, \forall t\in\mathbb{R}_+^*, c_n(t) = \overset{\circ}{c}_n \cdot e^{-n^2 t}$

• Montrons que $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\overset{\circ}{c}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(x)e^{-inx}\,dx$.

Via Cauchy-Schwarz, $\forall g\in L^2$, $\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g e^{-inx}\,dx\right| \leq \|g\|_2$ et comme $u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0]{L^2} u_0$, à la limite : $c_n(t)\xrightarrow[t\to 0]{} \overset{\circ}{c}_n = c_n(u_0)$

2) Existence : On pose, pour $n\in\mathbb{Z}$, $u_n(t,x) = c_n(u_0)e^{-n^2t}e^{inx}$

▶ Comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u_0)|^2 = \|u_0\|_2^2 < +\infty$ via Parseval, $c_n(u_0)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en particulier $(c_n(u_0))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée par un $M>0$

▶ Soient $0<a<b$ deux réels. La majoration, avec $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$,
$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}u_n}{\partial t^\alpha \partial x^\beta}(t,x)\right| \leq |n|^{2\alpha+\beta} M e^{-n^2 a}$ pour tout $t>a$ et $x\in\mathbb{U}$,

et que la série, de t.g. positif, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2\alpha+\beta} e^{-n^2 a}$ cge, montre que la fonction $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$.

On calcule alors $\partial_t u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \partial_t u_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \partial_x^2 u_n = \partial_x^2 u$

- La convergence normale de la série définie par u rend licite l'échange $\sum\int = \int\sum$ suivant : pour $m\in\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u_0) e^{-n^2 t} e^{inx} e^{-imx} dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n(u_0) e^{-n^2 t}}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{+inx} e^{-imx} dx}_{\substack{=0 \text{ si } n\neq m \\ =1 \text{ si } n=m}}$$
$$= c_m(u_0) e^{-m^2 t}$$

Par Parseval :
$$\| u(t,\cdot) - u_0 \|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u_0)|^2 |1 - e^{-n^2 t}|^2$$

et la majoration
$$|c_n(u_0)|^2 |1-e^{-n^2 t}|^2 \leq \underset{\text{sommable.}}{\underset{\uparrow}{|c_n(u_0)|^2}}$$
permet d'appliquer le théorème de convergence dominée des séries.

et d'obtenir
$$\lim_{t\to 0} \| u(t,\cdot) - u_0\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u_0)|^2 \lim_{t\to 0} |1 - e^{-n^2 t}|$$
$$= 0$$
et le résultat.