DEV : LA DÉCOMPOSITION POLAIRE

Réf : NH2G2, P. Caldero et J. Germoni, p 348.

Thm DÉCOMPOSITION POLAIRE

L'application :

$$\mu : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$$
$$(O, S) \longmapsto O \cdot S$$

est un homéomorphisme

On remarque tout d'abord que μ est bien définie car $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

D'autre part μ est bien continue par continuité de la multiplication matricielle. 1

Il reste donc à voir :

1. μ surjective
2. μ injective
3. μ^{-1} continue.

Preuve de 1 : Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On cherche $O \in O_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq : $M = O \cdot S$.

Idée : Trouver un S qui convient dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ puis poser $O := MS^{-1}$ et vérifier que $O \in O_n(\mathbb{R})$
Clé : ${}^tMM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ⊕ thm spectral

On remarque que : ${}^tMM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
En effet :

- ${}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM$ donc $M \in S_n(\mathbb{R})$
- Pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a :
$${}^tX({}^tMM)X = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2 \geq 0.$$
Dc ${}^tMM$ est positive

- Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a :

$${}^tX\,{}^tMMX = \|MX\|^2 = 0 \iff MX = 0 \iff X = 0.$$

Dc ${}^tMM$ est définie.

Par le thm spectral, ${}^tMM$ se diagonalise dans une base orthonormée. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq :

$${}^tMM = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,P^{-1}$$

On pose : $S := P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})\,P^{-1}$. Ceci est possible car ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ses vp $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont toutes strictement positives.

Alors $S^2 \overset{\text{par déf de } S \text{ et car } (PAP^{-1})^2 = PA^2P^{-1}}{=} {}^tMM$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En effet,

- $${}^tS = {}^t(P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})\,P^{-1})$$
$$= {}^tP^{-1}\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})\,{}^tP$$
$$= P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})\,P^{-1}$$
$$= S.$$

car $P \in O_n(\mathbb{R})$ dc ${}^tP = P^{-1}$.

- Les vp de S sont toutes strictement positives donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

On pose : $O := MS^{-1}$. Alors $O \in O_n(\mathbb{R})$. En effet, on a :

$${}^tOO = {}^t(MS^{-1})(MS^{-1}) = {}^tS^{-1}\,{}^tMM\,S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$$

Pour $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ on a :
${}^tS = S$ donc par passage à l'inverse
$({}^tS)^{-1} = S^{-1}$ or $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car c'est un groupe donc $S^{-1} = {}^t(S^{-1})$
D'où : $({}^tS)^{-1} = {}^t(S^{-1}) =: {}^tS^{-1}$

Par définit° de O on a : $M = O \cdot S$ avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
ce qui conclut la preuve de surjectivité de μ.

Preuve de (2) : Pour l'injectivité on mq :

$$\forall (O', S') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad (M := O' \cdot S' = O \cdot S \implies O' = O \text{ et } S' = S)$$

où O et S sont les matrices définies comme dans (1)
par rapport à M.

Soit $O' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq : $M := O'S' = OS$.

Idée : On mq $S = S'$ alors cm $O'S' = OS$ nécessairement $O = O'$.
Clef : $S^2 = (S')^2$ ⊕ polynôme d'interpolation de Lagrange
⊕ codiagonalisation

On remarque que :

$$S^2 = {}^tMM = {}^t(O'S')(O'S') = {}^tS' \underbrace{{}^tO'O'}_{= I_n \text{ car } O' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} S' = {}^tS'S' \overset{S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}{=} (S')^2$$

(2) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$\forall 1 \leq i \leq n \quad Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

Alors :

$$\begin{aligned} S &= P \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1} \quad (3) \\ &= P \cdot Q(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) P^{-1} \quad (4) \\ &= Q(P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}) \\ &= Q(S^2) = Q((S')^2). \end{aligned}$$

Dc S' commute avec $(S')^2$ qui commute avec $Q((S')^2)$ càd S. D'où S' commute avec S. Ainsi S et S' sont codiagonalisables. Soit $P_0 \in Gl_n(\mathbb{R})$ tq.

Si $M \in M_n(\mathbb{R})$, tout polynôme en M commute avec M.

$$S = P_0 \, diag(\mu_1, ..., \mu_n) P_0^{-1}$$

$$S' = P_0 \, diag(\mu_1', ..., \mu_n') P_0^{-1}$$

où $\mu_i, \mu_i' \in \mathbb{R}_+^*$ car $S, S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Alors puisque $S^2 = (S')^2$ on déduit que :

$$diag(\mu_1^2, ..., \mu_n^2) = diag((\mu_1')^2, ..., (\mu_n')^2)$$

càd,

$$\forall 1 \leq i \leq n \qquad \mu_i^2 = (\mu_i')^2$$

Or tous les μ_i, μ_i' sont strictement positifs d'où :

$$\forall 1 \leq i \leq n \qquad \mu_i = \mu_i'$$

Donc : $S = S'$.

Il suit que $O = O'$ puisque $O'S' = OS$ et $S = S'$.

Ce qui conclut la preuve de l'injectivité de μ et nous montre l'unicité de la décomposition.

Preuve de 3 : On vient de mq μ est une bijection, ainsi

$$\forall M \in Gl_n(\mathbb{R}) \quad \exists (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad \begin{cases} \mu^{-1}(M) = (O,S) \\ M = OS \end{cases}$$

On montre la continuité de l'applicat

$$\mu^{-1} : \begin{array}{ccc} Gl_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ M = O\cdot S & \longmapsto & (O, S) \end{array}$$

par la caractérisation séquentielle

Soit $(M_p)_p \in Gl_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, tq :

$$M_p \xrightarrow[p\infty]{} M \quad \text{dans } Gl_n(\mathbb{R})$$

On note :

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad M_p = O_p S_p$$
$$M = OS$$

où $\forall p \quad O_p , O \in O_n(\mathbb{R})$
$\forall p \quad S_p , S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Il suffit de mq : $\begin{cases} O_p \longrightarrow O & \text{dans } O_n(\mathbb{R}) \\ S_p \longrightarrow S & \text{dans } \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \end{cases}$.

Idée Trouver une limite $\bar{O}$ pour $(O_p)_p$ puis
cm $S_p = O_p^{-1} M_p \longrightarrow \bar{O}^{-1} M$ poser $\bar{S} := \bar{O}^{-1} M$.
Mq : $\bar{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors $M = \bar{O}\bar{S} = OS$ et
conclure par unicité de la décompo.
Clé : $O_n(\mathbb{R})$ compact

Cm $O_n(\mathbb{R})$ compact la suite $(O_p)_p$ admet une valeur d'adhérence $\bar{O} \in O_n(\mathbb{R})$. Dc il ex. une ss-ste $(O_{p_k})_k$ de $(O_p)_p$ tq. $O_{p_k} \xrightarrow[k\infty]{} \bar{O}$

Alors puisque :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad M_{p_k} = O_{p_k} S_{p_k}$$

On a par continuité de l'appli $A \longmapsto A^{-1}$:

$$S_{p_k} = O_{p_k}^{-1} M_{p_k} \xrightarrow[k\infty]{} \bar{O}^{-1} M$$

On pose : $\bar{S} := \bar{O}^{-1} M$. Alors $\bar{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

En effet,

$$\bar{S} = \bar{O}^{-1} M \in Gl_n(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} \overset{⑤}{=} Gl_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \overset{⑥}{=} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

$\bar{S}$ est limite de la suite $(S_{p_k})_k$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Finalement, $M = \bar{O}\bar{S} = O.S$ donc par unicité de la décomposition : $\begin{cases} \bar{O} = O \\ \bar{S} = S \end{cases}$

On vient donc de mq, toute valeur d'adhérence de $(O_p)_p$ vaut exactement O. Ainsi $(O_p)_p$ est une suite de $O_n(\mathbb{R})$ qui admet une unique valeur d'adhérence. Puisque $O_n(\mathbb{R})$ compact, on en déduit que $(O_p)_p$ cvge vers O

⑦ Ainsi, par continuité de $A \longmapsto A^{-1}$.

$$S_p = O_p^{-1} M \longrightarrow O^{-1} M = S.$$

COMPLÉMENTS DE PREUVE : Ref : ROMBALDI

① $O(E) \leq GL(E)$ et $S^{++}(E) \subsetneq GL(E)$ où E esp. euclidien de dim finie.

On mq : $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

D'abord $O(E) \subseteq GL(E)$. Soit $u \in O(E)$, on mq u est bijective. Soit $x \in \ker u$. Alors :

$$u(x) = 0 \iff \|u(x)\| = 0 \underset{\substack{u \in O(E) \\ \text{conserve la norme}}}{\iff} \|x\| = 0 \iff x = 0$$

D'où $\ker u = \{0\}$ dc u injective. Cûm E de dim finie u bijective.

Reste à voir que $O(E)$ est un groupe :

- $id \in O(E)$
- Pour $u, v \in O(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on a, pour $x \in E$:

$$\begin{aligned} \|(\lambda u) \circ v(x)\| = \|\lambda \cdot u(v(x))\| &= |\lambda| \, \|u(v(x))\| \\ &= |\lambda| \, \|v(x)\| && u \in O(E),\ v(x) \in E \\ &= |\lambda| \, \|x\| && v \in O(E) \end{aligned}$$

D'où cûm $\lambda \neq 0$: $\|u \circ v(x)\| = \|x\|$. dc $u \circ v \in O(E)$.

Et : $\|u^{-1}(x)\| \underset{u \in O(E)}{=} \|u(u^{-1}(x))\| = \|x\|$

dc $u^{-1} \in O(E)$

On mq. $S^{++}(E)$ est un sous-ensble de $GL(E)$.

~~D'abord on mq que~~ ~~$S(E)$ sous-ev de $\mathcal{L}(E)$~~.

Ceci découle de la caractérisation suivante

Prop

Soit $u \in S(E)$. Alors :

$u \in S^{++}(E)$ ssi toutes les vp de u sont strictmt positives

__Preuve.__

$(\Rightarrow)$ Soit $u \in S^{++}(E)$. Soit λ une vp de u et $x \neq 0$ un $\vec{vp}$ associé. On a :

$$\underset{\substack{\uparrow \\ u \in S^{++}(E)}}{0 <} \langle u(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = |\lambda| \, \|x\|^2$$

cm $x \neq 0$ alors $\|x\|^2 \neq 0$ dc $|\lambda| > 0$.

$(\Leftarrow)$ Soit $u \in S(E)$. Par le thm spectral, il existe une base orthonormée de $\vec{vp}$ $\underline{e} = (e_i)_i$. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \setminus \{0\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle u(x), x \rangle &= \langle u(\sum_i x_i e_i), \sum_j x_j e_j \rangle \\
&= \sum_i \sum_j x_i x_j \langle u(e_i), e_j \rangle && \text{$u(e_i) = \lambda_i e_i$ car e_i $\vec{vp}$ de u.} \\
&= \sum_i \sum_j x_i x_j \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle && \text{$\underline{e}$ b.o.n.} \\
&= \sum_i \lambda_i x_i^2 > 0.
\end{aligned}$$

$\uparrow$ car les $\lambda_i > 0$ par hyp.

Ainsi, si $u \in S^{++}(E)$ on a :

$\det u = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$ Dc $\det u \neq 0$. Dc $u \in GL(E)$.

② Pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tq:

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$$

Quitte à réordonner les valeurs, on supp que $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont 2 à 2 distinctes et les $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ prennent leurs valeurs parmi $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.

On prend alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme interpolateur de Lagrange associé à $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ et $\sqrt{\lambda} := (\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r}) \in \mathbb{R}^r$.

Dc : $\quad \forall 1 \leq j \leq r \quad Q(\lambda_j) = \sqrt{\lambda_j}$

Dc : $\quad \forall 1 \leq j \leq n \quad Q(\lambda_j) = \sqrt{\lambda_j}$

En fait, $\quad Q(X) := \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$

③ Si $D = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n) \in M_n(\mathbb{R})$ alors

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X] \quad Q(D) = \mathrm{diag}(Q(x_1), \dots, Q(x_n))$$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ noté :

$$Q(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d \in \mathbb{R}[X].$$

On a :

$$\begin{aligned} Q(D) &= a_0 I_n + a_1 D + \dots + a_d D^d \\ &= a_0 \, \mathrm{diag}(1, \dots, 1) + a_1 \, \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n) + \dots + a_d \, \mathrm{diag}(x_1^d, \dots, x_n^d) \\ &= \mathrm{diag}(a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_d x_1^d, \dots, a_0 + a_1 x_n + \dots + a_d x_n^d) \\ &= \mathrm{diag}(Q(x_1), \dots, Q(x_n)). \end{aligned}$$

④ Si $D = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors :

$$\forall P \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \forall Q \in \mathbb{R}[X] \qquad Q(PDP^{-1}) = P \cdot Q(D) \cdot P^{-1}.$$

Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $Q(X) = a_0 + \dots + a_d X^d \in \mathbb{R}[X]$.
On a :

$$\begin{aligned} P \cdot Q(D) \cdot P^{-1} &= P \cdot \left[a_0 I_n + \dots + a_d D^d \right] \cdot P^{-1} \\ &= a_0 P I_n P^{-1} + \dots + a_d P D^d P^{-1} \\ &= a_0 I_n + \dots + a_d (PDP^{-1})^d \\ &= Q(PDP^{-1}) \end{aligned}$$

⑤ $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

On my que $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ est fermé. En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) &= \{ A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R}^n \ \ {}^t x A x \geq 0 \} \\ &= \bigcap_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_x([0, +\infty[) \end{aligned}$$

où $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\begin{aligned} \varphi_x : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto {}^t x A x \end{aligned}$ continue comme composée d'applications continues.

On a : $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ d'où :

$$\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} \subset \overline{\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$$

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. On cherche $(A_p)_p \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq : $A_p \xrightarrow[p\infty]{} A$ ds $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

Scanné avec CamScanner

Puisque $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ elle est diag ds une base orth. et ses vp sont positives ou nulles. Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tq.

$$A = P \underbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)}_{=:D} P^{-1}$$

où $\lambda_i > 0$.

On pose :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} D_p := \mathrm{diag}\left(\lambda_1 + \frac{1}{2^p}, \dots, \lambda_r + \frac{1}{2^p}, \frac{1}{2^p}, \dots, \frac{1}{2^p}\right) \\ A_p := P D_p P^{-1} \end{cases}$$

Alors $D_p \longrightarrow D$ ds $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et par continuité de $A \longmapsto PAP^{-1}$, $A_p \longrightarrow PDP^{-1} = A$ ds $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Reste à remarquer que $\forall p \quad A_p \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
En effet, soit $p \in \mathbb{N}$. On a :

$${}^tA_p = {}^t(P D_p P^{-1}) = {}^tP^{-1}\, {}^tD_p\, {}^tP \underset{\uparrow \atop P \in O_n(\mathbb{R})}{=} P D_p P^{-1} = A_p.$$

Dc : $A_p \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, toutes ses vp sont strictement positives par def donc $A_p \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

⑥ $GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

On a :

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) &= \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) : \forall \lambda \in Sp(A) \quad \lambda \geq 0 \text{ et } \lambda \neq 0\} \\ &= \{A \text{ ——} : \forall \lambda \in Sp(A) \quad \lambda > 0\} \\ &= \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

} par la caractérisat° montrée en ①

On rmq que : $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ ssi $\forall \lambda \in Sp(A)$ $\lambda \neq 0$.
En effet,

$\boxed{\Rightarrow}$ Par contrap, si il existe $\lambda \in Sp(A)$ tq $\lambda = 0$ alors il existe $x \neq 0$ tq : $Ax = 0$ dc $\ker A \neq \{0\}$ dc $A \notin Gl_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Par contrap. si $A \notin Gl_n(\mathbb{R})$ alors $\ker A \neq \{0\}$ dc existe $x \neq 0$ tq $Ax = 0$ càd 0 est vp de A.

(7) Une suite à valeur dans un compact admettant une unique valeur d'adhérence converge.

Prop

Une suite numérique est cvgte ssi elle est bornée et admet une unique valeur d'adhérence.

Soit $(u_n)_n$ une suite à valeur ds un compact K
On suppose que $(u_n)_n$ admet une unique valeur d'adhérence. Puisque K compact alors il est borné, dc en particulier $(u_n)_n$ est bornée
D'après la prop précédente $(u_n)_n$ cvge.