16/03/15

Echantillonage de Shannon

Réf : Willem

Définition : $BL^2 = \{ u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{u}_{/\mathbb{R}\setminus I} = 0 \}$ où $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Théorème :

i) BL^2 est un espace de Hilbert.

ii) L'application $\begin{array}{l} BL^2 \to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ u \mapsto (u(n))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$ est une isométrie.

Application : on peut reconstruire u à partir de l'échantillon $(u(n))_{n\in\mathbb{Z}}$.

dém :

i) Il suffit de montrer que BL^2 est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R})$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de BL^2 tendant vers $u \in L^2(\mathbb{R})$. Par continuité de la transformée de Fourier, $\hat{u}_n \xrightarrow[L^2]{} \hat{u}$. Ainsi $\hat{u}_n \mathbb{1}_\Omega \xrightarrow[L^2]{} \hat{u}\mathbb{1}_\Omega$ où $\Omega = \mathbb{R}\setminus I$.

Or $\hat{u}_n \mathbb{1}_\Omega = 0$, donc $\hat{u} = 0$ sur Ω : $u \in BL^2$.

ii) Montrons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme : Tout $u \in BL^2$ est continue et borné. De plus, $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^2}$.

dém : Soit $u \in BL^2$. Alors $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$. Comme $\hat{u}_{/\mathbb{R}\setminus I} \equiv 0$, $\hat{u}\mathbb{1}_I \in L^2(I) \subset L^1(I)$. Ainsi $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$, car $\hat{u} \equiv 0$ en Ω. On considère la transformée de Fourier inverse de $\hat{u}$: $\mathcal{F}^{-1}\hat{u}$. D'après le théorème d'inversion,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_I \hat{u}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi.$$

Ainsi, $u \in C_0(\mathbb{R})$ et $|u(x)| \leq \|\hat{u}\|_{L^2(I)}$ par inégalité de Cauchy-Schwarz, d'où $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^2}$.

□

On définit $\mathrm{sinc} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin \pi x}{\pi x} \text{ si } x \neq 0 \text{ ; } 1 \text{ si } x = 0. \end{array}$

Montrons que $(\tau_k \operatorname{sinc})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Soit $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$x \mapsto \begin{cases} e^{2i\pi k x} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\hat{e}_k(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e_k(x) e^{-2i\pi x\xi} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} e^{2i\pi(k-\xi)x} dx = \frac{\sin \pi(k-\xi)}{\pi(k-\xi)}$$

$$= \tau_k \operatorname{sinc}(\xi).$$

Ainsi $\tau_k \operatorname{sinc} = \hat{e}_k$. De plus, $\widehat{\tau_k \operatorname{sinc}} = \check{e}_k$

et donc $\tau_k \operatorname{sinc} \in BL^2$.

De plus, $\int_{\mathbb{R}} \tau_k \operatorname{sinc}\, \tau_j \operatorname{sinc} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{\tau_k \operatorname{sinc}}}\, \widehat{\tau_j \operatorname{sinc}} = \int_{\mathbb{R}} \overline{e_k}\, e_j = \delta_{kj}$

car $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I)$.

Montrons maintenant que $BL^2 \cap \operatorname{Vect}(\tau_k \operatorname{sinc}, k \in \mathbb{Z})^\perp = \{0\}$.

Soit $f \in \operatorname{Vect}(\tau_k \operatorname{sinc}, k\in\mathbb{Z})^\perp \cap BL^2$.

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f\, \tau_k \operatorname{sinc} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\tau_k \operatorname{sinc}}\, \hat{f} = \int_I \overline{e_k}\, \hat{f}$$

$\forall k$, $\hat{f}$ est orthogonale à e_k : comme $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est totale dans $L^2(I)$, $\hat{f} \equiv 0$ sur I. Comme $\hat{f} \equiv 0$ sur $\mathbb{R}\setminus I$, $\hat{f} \equiv 0$ donc $f \equiv 0$ et donc $(\tau_k \operatorname{sinc})_{k\in\mathbb{Z}}$ est totale.

Ainsi, pour tout $u \in BL^2$, $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle u, \tau_k \operatorname{sinc}\rangle \tau_k \operatorname{sinc}$ (au sens L^2).

Comme $\forall u \in BL^2$, $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^2}$, l'égalité ci-dessus est aussi vraie dans $C_0(\mathbb{R})$. En particulier, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$u(j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle u, \tau_k \operatorname{sinc}\rangle \underbrace{\operatorname{sinc}(j-k)}_{=\delta_{jk}} = \langle u, \tau_j \operatorname{sinc}\rangle$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) \operatorname{sinc}(x-k)$

et $\|u\|_{L^2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)|^2$.

Donc $\begin{array}{l} BL^2 \to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ u \mapsto (u(n))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$ est une isométrie.