VM
29/12/14

Morphismes d'algèbre sur $C(K, \mathbb{R})$

FGN

K espace métrique compact non vide.
$C(K, \mathbb{R})$ ensemble des applications continues de K dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble des morphismes d'algèbre de $C(K, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$
sont les $f \mapsto f(s)$, $s \in K$, ainsi que l'application nulle.

Soit φ un morphisme d'algèbre de $C(K, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, non nul.
Alors $\ker \varphi$ est un idéal propre de $C(K, \mathbb{R})$ et un hyperplan de $C(K, \mathbb{R})$.

Lemme : L'ensemble $H^\perp$ des formes linéaires sur $C(K, \mathbb{R})$ nulles sur un hyperplan H forme une droite vectorielle du dual $C(K, \mathbb{R})^*$.

dém : H est un hyperplan de $C(K, \mathbb{R})$ donc il existe une droite S supplémentaire de H dans $C(K, \mathbb{R})$. Soit $x_0 \in S \setminus \{0\}$.
Alors $C(K, \mathbb{R}) = H \oplus \mathbb{R}x_0$.

Soit ψ_0 la forme linéaire nulle sur H et telle que $\psi_0(x_0) = 1$.
Soit ψ une forme linéaire sur $C(K, \mathbb{R})$ nulle sur H.
Soit $\lambda = \dfrac{\psi(x_0)}{\psi_0(x_0)}$. Alors $f = \psi - \lambda\psi_0$ est nulle sur H, et nulle en x_0 car $f(x_0) = \psi(x_0) - \psi_0(x_0)\dfrac{\psi(x_0)}{\psi_0(x_0)} = 0$.
Donc f est nulle et $\psi = \lambda\psi_0$.

Réciproquement, la droite dirigée par ψ_0 est bien constituée de formes linéaires nulles sur H.

□

Ainsi, $\mathbb{R}\varphi$ est l'ensemble des formes linéaires sur $C(K, \mathbb{R})$ nulles sur $\ker \varphi$. Intéressons-nous maintenant aux idéaux propres de $C(K, \mathbb{R})$.

Soit $s \in K$. Soit $I_s = \{ f \in C(K, \mathbb{R}) \mid f(s) = 0 \}$.

I_s est un idéal propre de $C(K,\mathbb{R})$.

· Soit J un idéal propre de $C(K,\mathbb{R})$. Montrons qu'il existe $s \in K$ tel que $J \subseteq I_s$.

Par l'absurde, supposons que $\forall s \in K$, il existe $f_s \in J$ tel que $f_s(s) \neq 0$.

f_s est continue, donc il existe $r_s > 0$ tel que f_s ne s'annule pas sur $B(s, r_s)$. Or $K \subset \bigcup_{s \in K} B(s, r_s)$.

Par propriété de Borel-Lebesgue, K étant compact, il existe $s_1, \dots, s_n \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(s_j, r_{s_j}).$$

$f_{s_j} \in J$ donc $f_{s_j}^2 \in J$ et $f_{s_j}^2 > 0$ sur $B(s_j, r_{s_j})$.

Donc $f = \sum_{j=1}^{n} f_{s_j}^2 \in J$ et $f > 0$ sur K.

Ainsi $1 = \frac{1}{f} \cdot f \in J$ donc $C(K,\mathbb{R}) = J$, ce qui est exclu.

· Ainsi $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq I_s$ pour un certain $s \in K$.

Par conséquent, la forme linéaire $f \mapsto f(s)$ s'annule sur $\operatorname{Ker}\varphi$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(s) = \lambda \varphi(f)$ $\forall f \in C(K,\mathbb{R})$.

Soit f tel que $f(s) \neq 0$.

$$f(s)^2 = \lambda \varphi(f^2) = \lambda \varphi(f)^2$$

donc $\lambda f(s)^2 = (\lambda \varphi(f))^2 = f(s)^2$.

Ainsi $\lambda = 1$.

Donc $\varphi(f) = f(s)$ $\forall f \in C(K,\mathbb{R})$.

Réciproquement, il est facile de voir que l'application nulle et $f \mapsto f(s)$ sont des morphismes d'algèbre.