

Théorème:

Soit G le groupe des quaternions de norme 1. On a

l'isomorphisme $G/\{\pm 1\} \cong SO_3(\mathbb{R})$

Remarque: On peut interpréter le théorème de cette manière: "Toute notation de $SO_3(\mathbb{R})$ peut être vue comme un quaternion de norme 1"

Preuve:

idée: On va faire agir G sur le groupe des quaternions \mathbb{H} par automorphismes intérieurs. \mathbb{H} n'étant pas commutatif, cette action n'est pas triviale, on va en tirer des conséquences.

Etape 1: Atterrir dans $GL_4(\mathbb{R})$

Pour $g \in G$ et $q \in \mathbb{H}$, on pose $S_g(q) = g q g^{-1} = g q \bar{g}$ (en effet, $g \in G$ donc $1 = N(g) = g \bar{g} \Rightarrow g^{-1} = \bar{g}$). Ainsi l'application

$S_g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ est \mathbb{R} -linéaire (par linéarité de la conjugaison
 $q \mapsto g q \bar{g}$

et du produit matriciel) et bijective avec $(S_g)^{-1} = S_{g^{-1}} = S_{\bar{g}}$

(en effet: $q' = S_g(q) \Leftrightarrow q' = g q g^{-1} \Leftrightarrow g^{-1} q' g = q \Leftrightarrow g^{-1} q' (g^{-1})^{-1} = q \Leftrightarrow S_{g^{-1}}(q') = q$)

On obtient donc une application $S: G \rightarrow GL_4(\mathbb{R})$
 $g \mapsto S_g$

Remarque: Il ne faut pas s'étonner de voir apparaître $GL_4(\mathbb{R})$: On peut en effet voir les quaternions comme un sous-ensemble de $M_4(\mathbb{R})$.



Etape 2: Atterrir dans $O_4(\mathbb{R})$

S est un morphisme (en effet:

$S_{g_1 g_2}(q) = g_1 g_2 q \bar{g}_2 \bar{g}_1 = S_{g_1} S_{g_2}(q)$) et son noyau est $\ker S = \mathcal{Z}(\mathbb{H}) \cap G = \mathbb{R} \cap G = \{-1, +1\}$

les réels sont les seuls éléments de \mathbb{H} qui commutent

Par ailleurs, S_g conserve la norme. En effet :

$$\begin{aligned} \forall q \in \mathbb{H}, N(S_g(q)) &= S_g(q) \overline{S_g(q)} = gq\bar{g} \overline{gq\bar{g}} = gq\bar{g} \overline{gq\bar{g}} \\ &= g \cdot N(q) \cdot \bar{g} = g\bar{g} N(q) = N(q) \end{aligned}$$

\uparrow
 $N(q) \in \mathbb{R}$

Ainsi $S_g \in O(N) \cong O_4(\mathbb{R})$.
 \uparrow
 N est une forme quadratique

Etape 3: Atterrir dans $O_3(\mathbb{R})$:

Pour passer dans $O_3(\mathbb{R})$, on va se restreindre à l'ensemble des quaternions purs, formant un sous-espace de dimension 3 de \mathbb{H} .

Remarquons donc que $\beta := \{q \in \mathbb{H}; \bar{q} = -q\}$ est stable par S_g : En effet, $\forall q \in \beta, \overline{S_g(q)} = \overline{gq\bar{g}} = g\bar{q}\bar{g} = -gq\bar{g} = -S_g(q)$

Posons alors $s_g = S_g|_{\beta}$. On a donc $s_g \in O(N|_{\beta}) \cong O_3(\mathbb{R})$ et $s: G \rightarrow O_3(\mathbb{R})$ avec $\ker s = \{-1, +1\}$.
 $g \mapsto s_g$

Etape 4: Pour enfin arriver dans $SO_3(\mathbb{R})$

On munit $O_3(\mathbb{R})$ de sa topologie naturelle en voyant $O_3(\mathbb{R})$ comme un sous-espace de $M_3(\mathbb{R})$, et en identifiant ce dernier à \mathbb{R}^9 .

On peut désormais parler de continuité.

Les applications $\det: O_3(\mathbb{R}) \rightarrow \{-1, +1\}$ et $s: G \rightarrow O_3(\mathbb{R})$ sont continues. Par suite, $\det \circ s: G \rightarrow \{\pm 1\}$ est continue.



Par ailleurs, $G = \{q \in \mathbb{H}; q \cdot \bar{q} = 1\}$
 $= \{q \in \mathbb{H}; a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$

en voyant $q = ai + bj + ck + d$

On a donc $G \cong S^3$ qui est connexe, donc G connexe.

L'image d'un connexe par une application continue est un connexe.

De plus, $s(1) = \text{Id} \in SO_3(\mathbb{R})$, et $1 \in G$

Donc nécessairement, $s(G) \subseteq SO_3(\mathbb{R})$.

Etape 5: On veut $s(G) = SO_3(\mathbb{R})$



Comme $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les renversements, il suffit de montrer qu'on les atteint tous.

Soit $p \in \beta \cap G \in G$. On a $s_p(p) = p \underbrace{p\bar{p}}_{=1} = p$
donc s_p est une rotation d'axe (p) , car s_p fixe p .

$$\text{De plus, } (s_p)^2 = s_{p^2} = s_{pp} = s_{-p\bar{p}} = s_{-1} = \text{Id}$$

\uparrow \uparrow
 $p \in \beta$ $p \in G$

Ainsi, s_p est une involution et donc un renversement d'axe (p) .
On obtient ainsi tout les renversements de $SO_3(\mathbb{R})$.

Nous avons donc $s(\beta \cap G) \subset s(G) \subset SO_3(\mathbb{R})$, et $s(\beta \cap G) = SO_3(\mathbb{R})$
d'où $s(G) = SO_3(\mathbb{R})$. Finalement, par le premier théorème
d'isomorphisme, on a $G / \{\pm 1\} \cong SO_3(\mathbb{R})$. ■



© 2000

Remarques :

• **Représentations matricielles des quaternions**

Réprésentation comme une sous-algèbre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

On fait opérer \mathbb{H} sur lui-même par multiplication. Pour $q, q' \in \mathbb{H}$, on pose

$$T_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \\ q' \mapsto qq'$$

L'application T_q est manifestement linéaire et si $q = a + bi + cj + dk$, la matrice de T_q dans la base $(1, i, j, k)$ s'écrit

$$\begin{matrix} & T_q(1) & T_q(i) & T_q(j) & T_q(k) \\ \begin{matrix} 1 \\ i \\ j \\ k \end{matrix} & \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} & & & \end{matrix} \quad (\dagger)$$

Si l'on note $M(q)$ la matrice associée au quaternion q , alors $M(q)$ est la matrice dans la base $(1, i, j, k)$ de la multiplication à gauche par q . En composant les applications linéaires, on a donc le résultat suivant : si q_1 et q_2 sont deux quaternions, et $M(q_1), M(q_2)$ les matrices associées, alors $M(q_1)M(q_2)$ est la matrice de la composée des deux applications linéaires *multiplication à gauche par q_2 et multiplication à gauche par q_1* , c'est-à-dire l'application *multiplication à gauche par q_1q_2* . En fait, l'application

$$\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \\ q = a + bi + cj + dk \mapsto M(q) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme d'algèbre de \mathbb{H} sur la sous-algèbre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ des matrices de la forme (\dagger) .

De plus, on a

$$1_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Réprésentation comme une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

On remarque que l'on peut plonger le corps \mathbb{C} dans \mathbb{H} :

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H} \\ a + bi \mapsto a + bi + 0j + 0k$$

(on pourrait aussi faire $a + bi \mapsto a + 0i + bj + 0k$ ou encore $a + bi \mapsto a + 0i + 0j + bk$, mais par commodité de notation, on a préféré celui-là. Attention ! Le i dans \mathbb{C} est *a priori* différent du i dans \mathbb{H} ...)

Ainsi, \mathbb{H} est un \mathbb{C} -e.v. pour la loi $(\lambda, q) \mapsto q\lambda$ $\lambda \in \mathbb{C}$ et $q \in \mathbb{H}$ (le sens de la multiplication est important !) Une base de \mathbb{H} sur \mathbb{C} est alors (i, j) et si $q = a + bi + cj + dk$, alors on a

$$q = 1 \underbrace{(a + bi)}_{:=\lambda \in \mathbb{C}} + j \underbrace{(c - di)}_{:=\mu \in \mathbb{C}}$$

Grâce à la précaution prise sur le sens de la multiplication, l'application T_q , qui est \mathbb{R} -linéaire, est aussi \mathbb{C} -linéaire. La matrice de T_q dans la base $(1, j)$ s'écrit

$$1 \begin{pmatrix} T_q(1) & T_q(i) \\ \lambda & -\bar{\mu} \\ \mu & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

Comme précédemment, on a un isomorphisme

$$\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

$$q = 1 \underbrace{(a + bi)}_{:=\lambda \in \mathbb{C}} + j \underbrace{(c - di)}_{:=\mu \in \mathbb{C}} \mapsto M(q) = \begin{pmatrix} \lambda & -\bar{\mu} \\ \mu & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

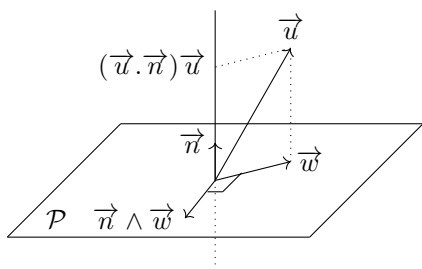
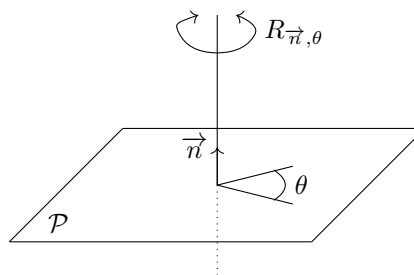
De plus, on a

$$1_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, k_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

- **Formules de rotation d'Olinde Rodrigues** Ce qui permet de faire explicitement le lien entre les quaternions et les rotations dans l'espace sont les formules de rotation d'Olinde Rodrigues.

On rappelle qu'une rotation vectorielle $R_{\vec{n}, \theta}$, dans l'espace euclidien orienté de dimension 3, est caractérisée par :

- un vecteur unitaire \vec{n} , qui détermine son axe de rotation, et
- son angle θ , celui de la rotation vectorielle plane associée, restriction de cette rotation au plan \mathcal{P} , orthogonal à l'axe.



Soit \vec{u} un vecteur de l'espace. Il se décompose en la somme de $(\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n}$, colinéaire à \vec{n} (et invariant par la rotation), et de $\vec{w} = \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} \in \mathcal{P}$ (qui va subir une rotation dans ce plan).

Le vecteur directement orthogonal à \vec{w} dans le plan (et de même norme) est $\vec{n} \wedge \vec{w}$, de sorte que l'image de \vec{w} dans la rotation d'angle θ est $(\cos \theta) \vec{w} + (\sin \theta) \vec{n} \wedge \vec{w}$.

Ainsi, \vec{v} , l'image de \vec{u} par la rotation $R_{\vec{n}, \theta}$ est

$$\vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\cos \theta) \vec{w} + (\sin \theta) \vec{n} \wedge \vec{w}$$

Or, $\vec{w} = \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n}$, d'où finalement la formule de rotation de Rodrigues :

$$\vec{v} = (\cos \theta) \vec{u} + (1 - \cos \theta) (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\sin \theta) \vec{n} \wedge \vec{u} \quad (\dagger\dagger)$$

Bon ! On a fait moitié du chemin !

On a vu que l'ensemble des quaternions purs, $\mathfrak{P} = \{q \in \mathbb{H} \mid \bar{q} = -q\}$, est un sous-espace de dimension 3 de \mathbb{H} . Plus précisément, muni de la base (i, j, k) , \mathfrak{P} est canoniquement isomorphe à \mathbb{R}^3 . Sous cet isomorphisme, un vecteur $\vec{v} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ est identifié au quaternion imaginaire pur $bi + cj + dk \in \mathfrak{P}$ et on peut s'autoriser à noter le quaternion $q = a + bi + cj + dk$ comme $q = a + \vec{v}$. On appelle a la *partie scalaire* de q et \vec{v} sa *partie vectorielle*.

Le *produit de Hamilton* (c'est-à-dire le produit de quaternions) de $q_1 = a_1 + \vec{v}_1$ et $q_2 = a_2 + \vec{v}_2$ est alors donné par :

$$q_1 q_2 = (a_1 + \vec{v}_1)(a_2 + \vec{v}_2) = a + \vec{v}$$

avec

$$a = a_1 a_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \quad \text{et} \quad \vec{v} = a_1 \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2.$$

En particulier, en prenant $a_1 = a_2 = 0$, le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs dans \mathbb{R}^3 peuvent être "récupérés" respectivement comme la partie scalaire (au signe près) et la partie vectorielle de leur produit de Hamilton. On peut donc définir la règle de *multiplication de deux vecteurs* comme suit

$$\vec{v} \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$$

On déduit directement du produit de Hamilton que l'inverse (à gauche et à droite) d'un quaternion non nul est

$$(a + \vec{v})^{-1} = \frac{1}{a^2 + |\vec{v}|^2} a - \vec{v}$$

En particulier, l'inverse d'un quaternion unitaire (tel que $a^2 + |\vec{v}|^2 = 1$) s'obtient simplement en changeant le signe de ses coordonnées imaginaires (*i.e*) $(a + \vec{v})^{-1} = a - \vec{v}$.

Nous sommes (enfin !) armés pour parler "rotation" ...

Définissons le quaternion (unitaire) $q = \cos(\alpha/2) + \vec{u} \sin(\alpha/2)$ où \vec{u} est un vecteur unitaire et $\alpha \in [0, 2\pi[$. Soit \vec{v} un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 , alors

$$\vec{v}^{\rightarrow} = q \vec{v} q^{-1} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \vec{u} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \vec{v} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \vec{u} \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

renvoie le vecteur \vec{v} tourné d'un angle α autour de l'axe dirigé par \vec{u} . En effet,

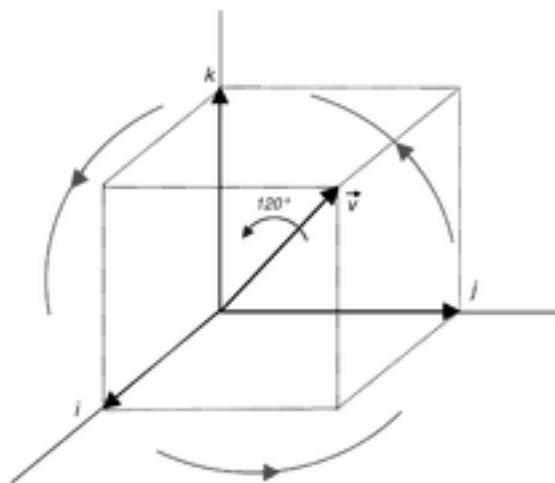
$$\begin{aligned} \vec{v}^{\rightarrow} &= q \vec{v} q^{-1} \\ &= \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \vec{u} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \vec{v} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \vec{u} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \vec{v} \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + (\vec{u} \vec{v} - \vec{u} \vec{v}) \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) - \vec{u} \vec{v} \vec{u} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \vec{v} \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + 2(\vec{u} \wedge \vec{v}) \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) - (\vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{u}) - 2\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{v})) \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \vec{v} \left(\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \left(2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) + \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{v}) \left(2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) \\ &= \vec{v} \cos \alpha + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \sin \alpha + \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{v})(1 - \cos \alpha) \\ &= (\vec{v} - \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{v})) \cos \alpha + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \sin \alpha + \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

On retrouve bien la formule de rotation de Rodrigues (††) !

Illustrons tout ça avec un exemple !

Considérons la rotation f autour de l'axe dirigé par $\vec{v} = i + j + k$ et d'angle $\alpha = 2\pi/3$. On considère le quaternion unitaire

$$\begin{aligned} q &= \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \sin \frac{\alpha}{2} \\ &= \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{v} \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{i + j + k}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1 + i + j + k}{2} \end{aligned}$$



Une rotation de 120° autour de la première diagonale permute i, j et k circulairement.

Ainsi, si on prend un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 que l'on note $\vec{w} = ai + bj + ck$, la rotation \mathcal{R} d'angle α et d'axe dirigé par le vecteur \vec{v} appliqué à \vec{w} est

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(ai + bj + ck) &= q(ai + bj + ck)q^{-1} \\ &= \frac{1 + i + j + k}{2} (ai + bj + ck) \frac{1 - i - j - k}{2} \\ &= \text{après de très très très longues lignes calculs...} (*) \\ &= ci + aj + bk \end{aligned}$$

Comme on s'y attendait, la rotation revient donc à permuter i, j et k circulairement.

(*) Les calculs sont fastidieux à faire à la main, mais dans un programme d'ordinateur, on appelle seulement deux fois la routine de multiplication de quaternions.

- **Sur la continuité de $s : G \rightarrow O_3(\mathbb{R})$.** Matriciellement, dans la base (i, j, k) , on obtient (en notant $g = a + bi + cj + dk$ avec $g \in G$) :

$$\begin{matrix} & s_g(i) & s_g(j) & s_g(k) \\ \begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix} & \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(dc - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

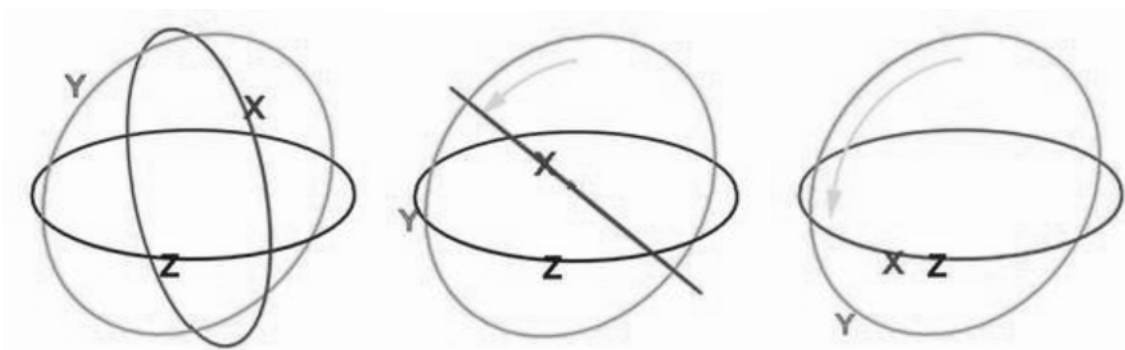
On voit donc que les coefficients de la matrice sont des fonctions polynômiales en a, b, c et d . Donc, on peut affirmer que l'application $s : G \rightarrow O_3(\mathbb{R})$ est continue *en les coefficients de la matrice*.

Par ailleurs, nous venons d'écrire la matrice orthogonale correspondant à une rotation au moyen du quaternion unitaire $g = a + bi + cj + dk$.

- **Applications**

L'intérêt de cet isomorphisme est le suivant : les quaternions unitaires fournissent une représentation de la rotation d'objets en trois dimensions. Comparés aux angles d'Euler, ils sont plus simples à composer et évitent le problème du *blocage de cardan*. Comparés aux matrices de rotations, ils sont plus stables numériquement et peuvent se révéler plus efficaces. En effet, quand on compose plusieurs rotations sur un ordinateur, les erreurs d'arrondi s'accumulent forcément. Un quaternion qui est légèrement erroné représente toujours une rotation après avoir été renormalisé ; une matrice qui est légèrement erronée ne sera plus orthogonale et sera difficile à convertir à nouveau en une matrice orthogonale qui convienne. Les domaines d'applications sont variés : infographie, robotique, navigation, dynamique moléculaire, mécanique spatiale des satellites ...

Le *blocage de cardan* est la perte d'un degré de liberté (aussi dit *gimbal lock*), qui survient quand les axes de deux des trois cardans nécessaires pour appliquer ou compenser les rotations dans l'espace à trois dimensions sont portés par la même direction.



Deux des trois cardans deviennent coplanaires : un degré de liberté est perdu

Que diriez-vous de m'envoyer un quatrième cardan pour Noël ?

Michael Collins, à bord d'Apollo 11,
communiquant par radio avec la Terre
à propos d'un blocage de cardan.