VM
18/05/15

Percolation

249, 264

On note $\mathbb{A}_2$ l'ensemble des couples $\{u, v\}$ de $\mathbb{Z}^2$ tels que $\|u-v\|_1 = 1$. On définit $(X_a)_{a \in \mathbb{A}_2}$ une suite iid de v.a de loi de Bernoulli (p).

On appelle chemin auto-évitant (CAE) une application $\pi : I \to \mathbb{Z}^2$ telle que

i) $I = \{0, \dots, n\}$ (CAE de longueur n) ou $I = \mathbb{N}$ (CAE infini)

ii) $\forall i$ tel que $(i, i+1) \in I \times I$, $\{\pi(i), \pi(i+1)\} \in \mathbb{A}_2$.

iii) π est injective.

A ω fixé, un CAE π est dit ouvert si $\forall i$, $X_{\{\pi(i), \pi(i+1)\}}(\omega) = 1$.

Théorème :

Il existe $p_c \in [0, 1]$ tel que

- si $p < p_c$, alors ps il n'existe aucun CAE infini ouvert.
- si $p > p_c$, alors la probabilité qu'il existe un CAE infini ouvert partant de $0 \in \mathbb{Z}^2$ est strictement positive.

De plus, $p_c > 0$.

dém : Soit $E_\infty = \{$il existe un CAE ouvert partant de 0 infini$\}$.

Soit $E_n = \{$ ——————————— de longueur $n\}$

$= \bigcup_{\gamma \text{ CAE de longueur } n \text{ partant de } 0} \{\gamma \text{ ouvert}\}$ mesurable.

Montrons que $E_\infty = \bigcap_{n \geq 1} E_n$. L'inclusion $\subset$ est claire.

Soit $\omega \in \bigcap_{n \geq 1} E_n$. Alors pour tout $n \geq 1$, il existe π_n un CAE ouvert de longueur n tel que $\pi_n(0) = 0$.

Soit $\pi(0) = 0$. Il existe $a \in \mathbb{Z}^d$ tel que pour une infinité de n, $\pi_n(1) = a$: on pose alors $\pi(1) = a$.

On construit par récurrence $(\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(m))$ telle que pour une infinité de n, $\forall i \leq m$, $\pi(i) = \pi_n(i)$.

Le chemin $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^d$ ainsi obtenu est ouvert injectif et part de O, donc $\omega \in E_\infty$.

Ainsi, E_∞ est mesurable.

Soit $\theta(p) := \mathbb{P}_p(E_\infty)$ la probabilité de E_∞ lorsque $X_a \sim Ber(p)$.

$\theta(p)$ est entièrement déterminée par la loi des $(X_a)_{a\in A_2}$, donc ne dépend que de p.

· Montrons que θ est croissante.

Soient $p < p'$.

On pose $(U_a)_{a\in A_2}$ une suite iid de loi uniforme sur $[0,1]$.

Soit $X_a = \mathbb{1}_{U_a \leq p}$

$Y_a = \mathbb{1}_{U_a \leq p'}$.

Ainsi tout chemin ouvert pour (X_a) l'est aussi pour (Y_a)

donc $E_\infty^X \subset E_\infty^Y$, où $E_\infty^X = \{$il existe... pour $(X_a)\}$

idem E_∞^Y.

Donc $\theta(p) = \mathbb{P}(E_\infty^X) \leq \mathbb{P}(E_\infty^Y) = \theta(p')$.

D'où la croissance de θ.

On pose $p_c := \sup\{p \in [0,1] \mid \theta(p) = 0\}$.

Par propriété de croissance, on a que :

· si $p > p_c$, alors $\theta(p) > 0$: il y a une proba >0 pour qu'il existe un CAE infini ouvert partant de O.

· Si $p < p_c$, alors $\theta(p) = 0$: ps, il n'y a pas de CAE infini ouvert partant de O.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{Z}^2$, ps, il n'y a pas de CAE infini ouvert partant de x.

Or une intersection dénombrable d'événements presque-sûrs est un événement presque-sûr, donc ps, il n'y a aucun CAE infini ouvert.

· De plus, $E_\infty = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{\substack{\gamma \text{ CAE} \\ \text{de longueur } n \\ \text{partant de } O}} \{\gamma \text{ ouvert}\}$ donc $\forall n \geq 1$, $\theta(p) \leq \sum_{\substack{\gamma \text{ CAE} \\ \text{de longueur } n \\ \text{partant de } O}} p^n$

Ainsi $\theta(p) \leq 4 \cdot 3^{n-1} p^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ lorsque $p < \frac{1}{3}$ donc $p_c \geq \frac{1}{3} > 0$.