VM
16/05/15
1

Critère de Weyl

209, 223

Réf : FGN analyse 2

Théorème : Soit (u_n) une suite de $[0,1]$.

Pour $0 \leq a < b \leq 1$, on note $S_n(a,b) = \mathrm{Card}(\{k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in [a,b]\})$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall\, 0 \leq a < b \leq 1$, $\dfrac{S_n(a,b)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a$.

(ii) $\forall f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continue, f vérifie
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f \qquad (*).$$

(iii) $\forall p \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{2ip\pi u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

dém : (i) $\Rightarrow$ (ii) :

Pour tout segment $[a,b] \subset [0,1]$, en notant $\chi_{[a,b]}$ l'indicatrice de $[a,b]$, on a $\dfrac{S_n(a,b)}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \chi_{[a,b]}(u_k)$

$$\text{et } b-a = \int_0^1 \chi_{[a,b]}(x)\,dx.$$

Donc tout $\chi_{[a,b]}$ vérifie $(*)$. Par linéarité, toute fonction positive en escalier vérifie $(*)$.

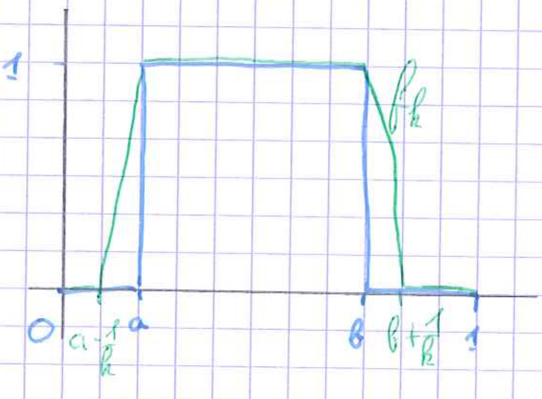
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe g en escalier telle que $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$.

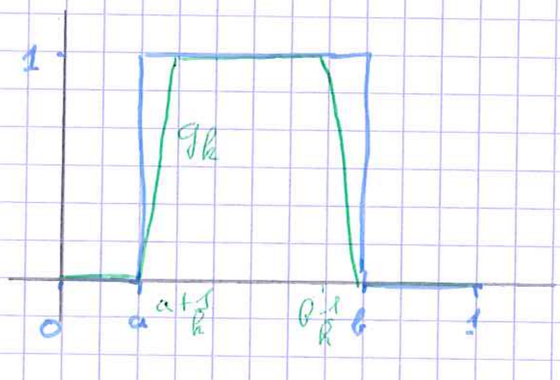
Alors,
$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \int_0^1 f\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f-g)(u_k)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) - \int_0^1 g\right| + \left|\int_0^1 (f-g)\right|$$
$$\leq 2\varepsilon + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) - \int_0^1 g\right|.$$

Comme g vérifie $(*)$, pour n assez grand,
$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \int_0^1 f\right| \leq 3\varepsilon,$$
donc f vérifie $(*)$ et on a prouvé (ii).

(ii) ⇒ (i) Soient $0 < a < b < 1$.

On va approcher $\chi_{[a,b]}$ par des fonctions continues affines par morceaux. Pour tout $k \geq K = \max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{2(b-a)}, \frac{1}{1-b}\right)$, on définit f_k et g_k par :





Pour tout $k \geq K$, on a $\quad g_k \leq \chi_{[a,b]} \leq f_k$

donc $\forall k \geq K, \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g_k(u_j) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_{[a,b]}(u_j) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_k(u_j)$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_0^1 g_k = b - a - \frac{1}{k} \qquad\qquad \int_0^1 f_k = b - a + \frac{1}{k}$$

donc $\quad \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_{[a,b]}(u_j) \leq b - a + \frac{1}{k} \quad \forall k$

donc $\quad$ ———————— $\leq b - a$.

De même, $\quad \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} S_n(a,b) \geq b - a$.

Ainsi, $\quad \frac{S_n(a,b)}{n} \longrightarrow b - a$.

Les cas $a = 0$ et/ou $b = 1$ se traitent de manière analogue.

<u>(ii) ⇒ (iii)</u> :

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue. Alors $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$

où $f_1 = \max(\mathrm{Re} f, 0)$, $f_2 = \max(-\mathrm{Re} f, 0)$

$f_3 = \max(\mathrm{Im} f, 0)$, $f_4 = \max(-\mathrm{Im} f, 0)$

Ces 4 fonctions sont positives et continues, donc vérifient (*).

VH
16/05/15
2

On en déduit par linéarité que toute $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue vérifie $(*)$.

En particulier, $\forall p \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \to 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) :

Comme les fonctions constantes vérifient de manière évidente $(*)$,

et d'après (iii), par linéarité, $(*)$ est vrai pour tout polynôme

trigonométrique de la forme $x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi k x}$.

Or cet ensemble est dense dans $A := \{ f : C([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0 \}$

pour la norme uniforme, donc le même argument qu'en (i)

permet de dire que $(*)$ est vrai pour les fonctions de A.

Soit $g \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $f \in A$ tel que $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Donc g vérifie $(*)$.