VM
30/05/15
1

Translatés d'une fonction dérivable

159

Réf : FGN alg 1
↳ Familles libres d'applications (p. 300)

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.
Les translatés de f engendrent un sous-espace vectoriel de dimension finie ssi f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

Lemme : Soit K un corps commutatif.
$(f_1, \dots f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(K, K)$ ssi il existe $x_1, \dots, x_n \in K^n$ tels que $(f_i(x_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ soit inversible.

dém : • Si la famille est liée, alors il existe une combinaison linéaire non triviale des lignes de $(f_i(x_j))$ et la matrice n'est pas inversible.

• Si la famille est libre, notons $F = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ l'espace vectoriel de dimension n engendré par les f_i.

Soit $A = \left\{ ev_a : \begin{array}{l} F \to K \\ f \mapsto f(a) \end{array} ; a \in K \right\} \subset F^*$.

$\mathrm{Vect}(A) = (\mathrm{Vect}(A)^\circ)^\perp = (A^\circ)^\perp$.

Or si $f \in A^\circ$, alors $f(a) = 0 \ \forall a \in K$ donc $f = 0$,
ainsi $(A^\circ)^\perp = \{0\}^\perp = F^*$ donc $\mathrm{Vect}(A) = F^*$.

Il existe $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $(ev_{x_1}, \dots, ev_{x_n})$ forme une base de F^*. Soit $M = (f_i(x_j))$.

Montrons que les lignes $L_1, \dots, L_n$ de M sont linéairement indépendantes. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$

Alors $\forall j$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_j) = 0$ donc $ev_{x_j}\left(\sum_i \lambda_i f_i\right) = 0$.

Comme $(ev_{x_j})_j$ est une base de F^*, $\sum_i \lambda_i f_i = 0$ donc $\lambda_i = 0 \ \forall i$ car (f_i) libre.

Ainsi M est inversible. $\square$

dém (théorème) :

Soit f dérivable. On note $f_a : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a+x) \end{array}$ ses translatées.

Supposons que $F = \mathrm{Vect}(f_a)$ soit de dimension finie n.
Alors il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ soit une base de F. Il existe, d'après le lemme, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $M = (f_{a_i}(x_j))$ soit inversible.
Montrons que F est stable par dérivation.

Soit $g \in F$. (*) F étant stable par translation ; $g_a \in F$ $\forall a \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists \lambda_1(a), \dots, \lambda_n(a)$ tels que

$$g_a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a) f_{a_i}.$$

Donc
$$\begin{pmatrix} g_a(x_1) \\ \vdots \\ g_a(x_n) \end{pmatrix} = {}^tM \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix}$$

d'où
$$\begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix} = {}^tM^{-1} \begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix} = {}^tM^{-1} \begin{pmatrix} g_{x_1}(a) \\ \vdots \\ g_{x_n}(a) \end{pmatrix}$$

M étant indépendantes de a, et g_{x_j} étant dérivable $\forall j$, λ_i est dérivable $\forall i$.

(*) g est combinaison linéaire des f_{a_i}, qui sont dérivables, donc g est dérivable.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(a+x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a) f_{a_i}(x)$

donc en dérivant p/r à a et en évaluant en 0,

$$g' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(0) f_{a_i} \in F.$$

Ainsi, $\forall g \in F$, g est $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)} \in \mathcal{C}^\infty$.
C'est vrai en particulier pour f. Or F est de dimension finie n, donc il existe $p \leq n$ tel que $f^{(p)} \in \mathrm{Vect}(f, f', \dots, f^{(p-1)})$.

VM
30/05/15
2

Donc f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre p.

Réciproquement, si f vérifie une telle équation, ces translatés aussi et comme l'espace des solutions est de dimension finie, l'espace des translatés l'est aussi.

□