VIII
30/05/15
1

Structure des polynômes symétriques

Réf : Tauvel

Notations : On note $A[X_1, \dots, X_n]^{sym}$ l'ensemble des polynômes symétriques de $A[X_1, \dots, X_n]$.

On définit les polynômes symétriques élémentaires en $X_1, \dots, X_n$ par $\Sigma_p := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_p}$.

Lemme : Soit $P \in A[X_1, \dots, X_n]^{sym}$ tel que $P(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = 0$.

Alors $\Sigma_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$ divise P.

dém : Par récurrence sur n.

$n=1$: $\overset{P(0)=0}{\Rightarrow}$ X_1 divise alors P.

$n \geq 2$: Notons $B = A[X_1, \dots, X_{n-1}]$ et $\tau = (n \ n-1)$.

Supposons le lemme vrai pour tout $Q \in B^{sym}$.

Soit $P \in A[X_1, \dots, X_n]^{sym}$ tel que $P(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = 0$.

$P = P_0 + P_1 X_n + \dots + P_n X_n^n$ où $P_0, \dots, P_n \in B$.

D'après l'hypothèse, $P_0 = 0$.

De plus, $P^\tau = P$ donc $P(X_1, \dots, X_{n-2}, 0, X_n) = 0$.

Ainsi pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $P_j(X_1, \dots, X_{n-2}, 0) = 0$

donc $\prod_{i=1}^{n-1} X_i$ divise tous les P_j.

Donc $X_n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} X_i$ divise P. □

Théorème : L'algèbre $A[X_1, \dots, X_n]^{sym}$ est engendrée par les polynômes symétriques élémentaires en $X_1, \dots, X_n$.

Définition : Pour tout monôme $Q = \lambda X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n}$, on définit son poids $\Pi(Q) = \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + n\nu_n$

Pour tout $P \in A[X_1, \dots, X_n]$, $\Pi(P)$ est le maximum du poids des monômes.

On a $\deg P(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n) \leq \Pi(P)$.

dém (théorème) :

Soit $H(n,d)$ la propriété :

" Pour tout $P \in A[X_1, \dots, X_n]^{sym}$ de degré d, il existe $Q \in A[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\pi(Q) \leq d$ et

$$P(X_1, \dots, X_n) = Q(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)."$$

Récurrence sur n :

$n=1$: d quelconque, on a $X_1 = \Sigma_1$ et $Q = P$ convient car $\pi(P) = d$.

Donc $H(1,d)$ est vrai pour tout $d \geq 0$.

Soit $n \geq 2$. On note $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ les polynômes symétriques élémentaires en $X_1, \dots, X_{n-1}$.

Supposons $H(n-1, d)$ vraie pour tout $d \in \mathbb{N}$.

Montrons $H(n,d)$ par récurrence sur d.

$d=0$: $H(n,0)$ est claire.

$d \geq 1$: supposons $H(n, l)$ vraie pour tout $l < d$.

Soit $P \in A[X_1, \dots, X_n]^{sym}$ de degré d.

Soit $R(X_1, \dots, X_{n-1}) = P(X_1, \dots, X_{n-1}, 0)$.

Alors $\deg R \leq d$, $R \in B^{sym}$ donc d'après $H(n-1, \deg R)$, il existe $Q_1 \in B$ de poids $\leq d$ tel que

$$R(X_1, \dots, X_{n-1}) = Q_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}).$$

Soit $P_1(X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n) - Q_1(\Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1})$.

P_1 est symétrique

Alors $P_1(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = R(X_1, \dots, X_{n-1}) - Q_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) = 0$.

D'après le lemme, il existe $P_2 \in A[X_1, \dots, X_n]^{sym}$ tel que

$$P_1 = P_2 \Sigma_n.$$

Or $\deg \Sigma_n = n$, $\deg P_1 \leq d$ car $\deg P \leq d$

et $\deg Q_1(\Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1}) \leq \pi(Q_1) \leq d$.

donc $\deg P_2 \leq d - n < d$.

Donc d'après $H(n, \deg P_2)$, il existe $Q_2 \in A[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\pi(Q_2) \leq d - n$ et $P_2(X_1, \dots, X_n) = Q_2(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$.

VI4
30/05/15
2

Donc $P = Q_1(\Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1}) + \Sigma_n \, Q_2(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$.

On $\pi(Q_1) \leq d$

$\pi(Q_2) \leq d-n$ donc $\pi(X_n Q_2) \leq d$

et $\pi(Q_1 + X_n Q_2) \leq d$ d'où $H(n,d)$.

Ce qui démontre le théorème. □

Unicité : Les polynômes symétriques élémentaires $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ sont algébriquement libres sur A.

dém : Par récurrence sur n.

$n=1$: si $P(\Sigma_1) = 0$ alors $P(X_1) = 0 \Rightarrow P = 0$.

$n \geq 2$: Supposons $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ non algébriquement libres.

Alors il existe $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ non nul tel que

$P(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n) = 0$, de degré minimal pour cette propriété

$P = P_0 + P_1 X_n + \dots + P_n X_n^n$ où $P_0, \dots, P_n \in B$.

$0 = P(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)\big|_{X_n = 0} = P_0(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$

donc par hypothèse de récurrence, $P_0 = 0$.

Ainsi, $P = Q X_n$, où $Q \in A[X_1, \dots, X_n]$, $\deg Q < \deg P$,

$Q(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n) = 0$.

C'est exclu par minimalité de $\deg P$.

Donc $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ algébriquement libres. □