VM
2/01/15

# Endomorphismes semi-simples

141, 153, 154

**Déf** : $E$ $K$-ev de dimension finie. $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme semi-simple si tout sev de $E$ stable par $u$ admet un supplémentaire stable par $u$.

**Théorème** : $u$ est semi-simple ssi $\Pi_u$ est sans facteurs carrés.

dém : · Supposons $u$ semi-simple.

Supposons par l'absurde qu'il existe $P, Q \in K[X]$ unitaires tels que $\Pi_u = P^2 Q$, avec $\deg P \geq 1$.

Soit $F = \operatorname{Ker} P(u)$. Alors $F$ est stable par $u$.

Donc il existe $G$ supplémentaire de $F$ dans $E$ stable par $u$.

Soit $x \in E$. $x = x_F + x_G$, où $x_F \in F$, $x_G \in G$.

On va montrer que $PQ(u)(x) = 0$.

· $PQ(u)(x_F) = Q(u)\big(\underbrace{P(u)(x_F)}_{=0}\big) = 0$

· $x_G \in G$ donc $PQ(u)(x_G) \in G$ car $G$ est stable par $u$.

$\underset{\underset{0}{\|}}{P^2Q(u)(x_G)} = P(u) \circ PQ(u)(x_G)$ car $P^2Q = \Pi_u$

donc $PQ(u)(x_G) \in F$.

Or $F \cap G = \{0\}$ donc $PQ(u)(x_G) = 0$.

Ainsi $PQ$ est un polynôme annulateur de $u$, de degré strictement inférieur au degré de $\Pi_u = P^2Q$ et non nul : ceci est exclu, donc $\Pi_u$ est sans facteur carré.

· Réciproquement, supposons $\Pi_u$ sans facteur carré.

$\Pi_u = \prod_{i=1}^{n} P_i$, $P_i$ irréductible unitaire $\forall i$

$(P_i)_i$ deux à deux premiers entre eux.

Lemme 1 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ a un polynôme minimal irréductible, alors $f$ est semi-simple.

D'après le lemme de décomposition des noyaux, on a :

$$E = \hat{\bigoplus_{i=1}} \underbrace{\mathrm{Ker}\, P_i(u)}_{E_i}$$

$E_i$ est un sev de $E$ stable par $u$ non réduit à $\{0\}$. Soit $u_i$ l'endomorphisme induit par $u$ sur $E_i$.

Alors $\Pi_{u_i} = P_i$ : en effet, $P_i$ est annulateur de $u_i$, et irréductible donc c'est le polynôme minimal car $E_i \neq \{0\}$.

D'après le lemme 1, $u_i$ est semi-simple.

Soit $F$ un sev de $E$ stable par $u$. Soit $F_i := F \cap E_i$.

Alors $F = \hat{\bigoplus_{i=1}} F_i$ et $\forall i$, $F_i$ est stable par $u_i$.

d'après le lemme de décomposition des noyaux appliqué à $u|_F$.

Donc $F_i$ admet un supplémentaire $G_i$ dans $E_i$ stable par $u_i$, donc stable par $u$.

Soit $G = \hat{\bigoplus_{i=1}} G_i$. $G$ est stable par $u$ et

$$E = \hat{\bigoplus_{i=1}} E_i = \hat{\bigoplus_{i=1}} (F_i \oplus G_i) = F \oplus G.$$

Donc $u$ est semi-simple.

---

dém du lemme : Soit $L = K[X]/(\Pi_f)$. $\Pi_f$ est irréductible, donc $(\Pi_f)$ est un idéal maximal de $K[X]$ et $L$ est par suite un corps.

$$\begin{array}{rcl} L \times E & \to & E \\ (\overline{P}, x) & \mapsto & P(f)(x) \end{array}$$

est bien définie : si $\overline{P} = \overline{Q}$, il existe $R$ tel que $P = Q + R\Pi_f$

et $P(f)(x) = Q(f)(x) + R(f)(\underbrace{\Pi_f(f)}_{=0}(x))$

Cette application fait de $E$ un $L$-espace vectoriel.

Un sous-$K$-ev de $E$ est stable par $f$ ssi c'est un sous-$L$-ev de $E$.

Soit $F$ un sous-$K$-ev stable par $f$. C'est un sous-$L$-ev de $E$. Soit $G$ un supplémentaire de $F$ dans $E$ : c'est un sous-$L$-ev, donc c'est stable par $f$ : donc $f$ est semi-simple.