VM
16/04/15
1

Isomorphisme $PSL(2,\mathbb{R}) \simeq SO_0(1,2)$

150, 170, 171, 204, 214, 217

Réf : Mneimné (adapté)

On note $SO(1,2)$ l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1 telles que ${}^tM \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.
(les coefficients vides sont des zéros)

On note $sl(2,\mathbb{R})$ les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de trace nulle.

Théorème : Les espaces $PSL(2,\mathbb{R})$ et $SO_0(1,2)$ (composante connexe de I_3 dans $SO(1,2)$) sont des groupes isomorphes.

dém : • L'application det est une forme quadratique sur $sl(2,\mathbb{R})$, qui est nondégénérée et de signature $(1,2)$:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = -a^2 - bc = -a^2 + \frac{(b-c)^2 - (b+c)^2}{4}$$

On note (E,q) cet espace quadratique isomorphe à $(\mathbb{R}^3, x^2 - y^2 - z^2)$.

• $SL(2,\mathbb{R})$ agit sur $E = sl(2,\mathbb{R})$ par conjugaison : en effet, la conjugaison préserve la trace. De plus, comme elle préserve aussi le déterminant, l'action est constituée d'isométries relativement à q.

On a un morphisme de groupe :

$$\varphi : SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow O(E)$$
$$A \longmapsto (M \mapsto AMA^{-1})$$

φ est continue (par composition de $A \mapsto (A,A)$ et $(B,C) \mapsto BMC^{-1}$) et $SL(2,\mathbb{R})$ est connexe, donc $\mathrm{Im}\,\varphi$ est connexe. Ainsi, $\mathrm{Im}\,\varphi$, qui contient id_E, est incluse dans $SO_0(E)$.

• Déterminons $\mathrm{Ker}\,\varphi$:

Soit $A \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Alors A commute avec toute matrice de $sl(2,\mathbb{R})$. Or toute droite est droite propre d'une matrice de trace nulle, donc A laisse stable toute droite de $\mathbb{R}^2$: A est une homothétie dans $SL(2,\mathbb{R})$, donc $A = \pm I_2$. Or il est clair que $\pm I_2 \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\pm I_2\}$.

- Déterminons $\mathrm{Im}\,\varphi$:

Lemme : $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un ouvert de $O(E)$.

Si on admet le lemme, alors $\mathrm{Im}\,\varphi$ est aussi fermé (en effet, $O(E)$ est réunion disjointe des classes à gauche modulo $\mathrm{Im}\,\varphi$, qui sont toutes ouvertes par translation). Donc $\mathrm{Im}\,\varphi$ est ouvert fermé connexe et non vide dans $O(E)$, c'est donc $SO_0(E)$.

Ainsi $\tilde{\varphi} : PSL(2,\mathbb{R}) \to SO_0(E) \simeq SO_0(1,2)$ est un isomorphisme de groupe.

- dém (lemme) :

Comme φ est un morphisme de groupe, il suffit de montrer que φ est ouverte en I_2, i.e que $\exists\, V$ voisinage ouvert de I_2 dans $SL(2,\mathbb{R})$, $\varphi(V)$ est un voisinage ouvert de id_E dans $O(E)$.

Il suffit de montrer que φ réalise un C^1-difféo d'un voisinage de I_2 sur un vois de id_E.

$SL(2,\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension 3 de $M(2,\mathbb{R})$, d'espace tangent en I_2 $sl(2,\mathbb{R})$.

$O(E)$ est une sous-variété de dimension 3 de $M_3(\mathbb{R})$.

φ est C^1 et
$$\varphi(I_2+H)(M) = (I_2+H)\,M\,(I_2+H)^{-1}$$
$$= (I_2+H)\,M\,(I_2 - H + o(H))$$
$$= M + HM - MH + o(H)$$

Ainsi,
$$T\varphi_{I_2} : sl(2,\mathbb{R}) \to T_{id}O(E)$$
$$H \mapsto (M \mapsto HM - MH)$$

$$H \in \mathrm{Ker}\,T\varphi_{I_2} \iff H \in sl(2,\mathbb{R}) \text{ et } H \text{ commute avec tout } M \in E \;(M \in sl(2,\mathbb{R}))$$
$$\iff H \text{ homothétie de trace nulle}$$
$$\iff H = 0.$$

Par égalité des dimensions, $T\varphi_{I_2}$ est injective donc inversible.

VM
16/04/15
2

Donc par théorème d'inversion locale, φ est ouverte au voisinage de I_2. Ce qui conclut la preuve du lemme.

En fait, $\tilde{\varphi}$ est même un homéomorphisme.

On note π la projection $SL(2,\mathbb{R}) \to PSL(2,\mathbb{R})$.

On munit $PSL(2,\mathbb{R})$ de la topologie quotient : V est un ouvert de $PSL(2,\mathbb{R})$ <u>ssi</u> $\pi^{-1}(V)$ est un ouvert de $SL(2,\mathbb{R})$.

$$\begin{tikzcd} SL(2,\mathbb{R}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & SO_0(E) \\ PSL(2,\mathbb{R}) \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Si U est un ouvert de $SO_0(E)$, comme φ est continue, $\underbrace{\varphi^{-1}(U)}_{\pi^{-1}\circ\tilde{\varphi}^{-1}(U)}$ est un ouvert de $SL(2,\mathbb{R})$.

Donc $\tilde{\varphi}^{-1}(U)$ est un ouvert de $PSL(2,\mathbb{R})$.

Si V est un ouvert de $PSL(2,\mathbb{R})$, $\pi^{-1}(V)$ est un ouvert de $SL(2,\mathbb{R})$ et
$$\tilde{\varphi}(V) = \tilde{\varphi}(\pi\circ\pi^{-1}(V)) = \varphi(\pi^{-1}(V))$$

φ est ouverte donc $\tilde{\varphi}(V)$ est ouvert dans $SO_0(E)$.