VM
22/04/15
1

Formule de Poisson (résultant) + application

102, 143

Réf : Apéry (pour le thm)

<u>Théorème</u> : A anneau commutatif intègre.

Soit $f(X) = a_m X^m + \dots + a_1 X + a_0$, $a_m \in A^\times$.

Soit $g(X) \in A[X]_{\leq n}$.

On note $S = A[X]/(f)$ et $\overline{g}_S : S \to S$ le passage au quotient de la multiplication par g.

Alors $\mathrm{Res}_{m,n}(f,g) = a_m^m \det g_S$.

<u>dém</u> : L'application $\begin{array}{rcl} A[X] & \to & A[X] \\ P & \mapsto & gP \end{array}$ envoie (f) sur un idéal inclus dans (f) (sous-module de (f)), donc g_S est bien défini. De plus, $S = A[X]/(f)$ est un A-module libre de type fini donc le déterminant de g_S est bien défini.

· Les colonnes de $\mathrm{Sylv}_{m,n}(f,g)$ sont formées par les coefficients de $X^{n-1}f, \dots, Xf, f, X^{m-1}g, \dots, Xg, g$ dans la base $(X^{m+n-1}, \dots, X, 1)$.

Soit $\ell \in \{0, \dots, m-1\}$. On effectue la division euclidienne de $X^\ell g$ par f, qui existe car le coefficient dominant de f est inversible :

$$X^\ell g = q_\ell f + r_\ell, \quad \text{où } 0 \leq \deg r_\ell < m$$

Comme $\deg(X^\ell g) \leq m - 1 + n$, $\deg(f) = m$, on a $\deg q_\ell \leq n-1$, donc $q_\ell f$ est combinaison linéaire de $X^{n-1}f, \dots, Xf$ et f. On retranche ainsi à la colonne de $X^\ell g$ cette combinaison linéaire des n premières colonnes.

$$\mathrm{Res}_{m,n}(f,g) = \det \mathrm{Sylv}_{m,n}(f,g) = \begin{vmatrix} a_m & & (0) & \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & a_m & \cdots \\ a_0 & & \vdots & \\ & \ddots & \vdots & K \\ 0 & & a_0 & \end{vmatrix} \begin{array}{l} \}\, n \\ \\ \}\, m \end{array}$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n \qquad\qquad m$

où $K = \begin{pmatrix} \text{coeff} & \vdots & & \vdots & \text{coeff} \\ \text{de} & \vdots & \cdots & \vdots & \text{de} \\ r_{m-1} & \vdots & & \vdots & r_0 \end{pmatrix}$

Ainsi $\mathrm{Res}_{m,n}(f,g) = a_m^n \det K$.

- D'autre part, $g_S(X^\ell) = \overline{g X^\ell} \pmod f$
$= \overline{r_\ell} \pmod f$

Dans la base $(\overline{X}^{m-1}, \dots, \overline{X}, 1)$ de S, la matrice de g_S est K.

Ainsi $\det K = \det g_S$

d'où le résultat $\mathrm{Res}_{m,n}(f,g) = a_m^n \det g_S$.

Application : Supposons $X^m - 1$ scindé sur A : $X^m - 1 = \prod_{i=1}^{m}(X - \xi_i)$, $\xi_i \in A$.

Soit $P \in A[X]_{\leq m-1}$.

Alors $\sum_{i=1}^{m} P(\xi_i) = m\,P(0)$.

On applique la formule de Poisson avec $f(X) = X^m - 1$ et
$g(X) = P(X) = b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_1 X + b_0$

Comme pour tout $\ell \geq 0$, $X^{m+\ell} = X^\ell f + X^\ell$,

on a $\overline{X}^{m+\ell} = \overline{X}^\ell \pmod f$

et $g_S(X^\ell) = b_{m-1} \overline{X}^{m-1+\ell} + \dots + b_1 \overline{X}^{\ell+1} + b_0 \overline{X}^\ell$

donc $\mathrm{Res}_{m,m}(f,g) = \begin{vmatrix} b_0 & \cdots & & b_{m-2} & b_{m-1} \\ b_{m-1} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_0 & b_1 \\ b_1 & & & b_{m-1} & b_0 \end{vmatrix} = \det C$ où C est la matrice de g_S.

Si on considère maintenant $h(X) = T - P(X) \in A[T][X]$ et en travaillant dans l'anneau $A[T]$, on a maintenant le résultat :

$$\mathrm{Res}_{m,m}(f,h) = \begin{vmatrix} T - b_0 & -b_1 & \cdots & -b_{m-1} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ -b_1 & & & T - b_0 \end{vmatrix} = \chi_C(T) \text{ (polynôme caractéristique)}$$

Ainsi, $\chi_C(T) = \mathrm{Res}_X(X^m - 1, T - P(X))$

VH
22/04/15
2

d'où $\chi_C(T) = \mathrm{Res}_X\left(\prod_{i=1}^{m}(X-\xi_i), T-P(X)\right)$

$$= \prod_{i=1}^{m}(T-P(\xi_i))$$

Le coefficient en T^{n-1} de $\chi_C(T)$ est donc :

$$-\mathrm{tr}\, C = -\sum_{i=1}^{m} P(\xi_i)$$

Or $\mathrm{tr}\, C = m\, b_0 = m\, P(0)$

donc $\sum_{i=1}^{m} P(\xi_i) = m\, P(0)$.