Injectivité de la transformée de Fourier : (4)

El Amrani - Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels p. 115-116 et p. 156-157

Th : L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ est injective.

Lemme : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\forall x \in \mathbb{R}$, $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$.
Alors $\widehat{\gamma_a}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

---

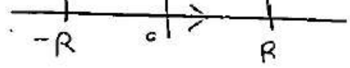
dem Lemme : $\gamma_a \in L^1$ donc $\widehat{\gamma_a}$ est bien définie.

On calcule, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\gamma_a}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} e^{-ixt}\, dt$.

En remarquant que : $at^2 + ixt = a\left(t + \frac{ix}{2a}\right)^2 + \frac{x^2}{4a}$, on a : $\widehat{\gamma_a}(x) = e^{-\frac{x^2}{4a}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(t+\frac{ix}{2a}\right)^2} dt}_{I}$

On considère : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{-az^2}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $R > 0$, on note C_R le contour suivant :



Ainsi :

$$\int_{C_R} e^{-az^2} dz = \int_{-R}^{R} e^{-at^2} dt + \int_0^{x/2a} i\, e^{-a(R+it)^2} dt - \int_{-R}^{R} e^{-a\left(t+\frac{ix}{2a}\right)^2} - \int_0^{x/2a} i\, e^{-a(-R+it)^2} dt$$

$$= I_1(R) + I_2(R) - I_3(R) - I_4(R).$$

Or, $|I_2(R)| \leq e^{-aR^2} \int_0^{x/2a} e^{at^2} dt \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$. De même pour $I_4(R)$.

De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left| e^{-a\left(t+\frac{ix}{2a}\right)^2} \right| \leq e^{-at^2} e^{\frac{x^2}{4a}} \in L^1(\mathbb{R})$ donc par théorème de convergence dominée : $\lim_{R \to +\infty} I_3(R) = I$.

Comme $z \mapsto e^{-az^2} dz$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que C_R est un contour fermé, on a $\int_{C_R} e^{-az^2} dz = 0$.

D'où $I = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\gamma_a}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

dem Th : Soit $f \in L^1$ tel que $\mathcal{F}(f) = 0$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2n^2}}$.

D'après le lemme $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widehat{\psi_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, n\, e^{-\frac{x^2 n^2}{2}}$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \psi_n(x) e^{iax} \in L^1$.

D'après la formule de dualité :

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{g_n}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{\psi_n}(x-a)\, dx \overset{\widehat{\psi_n} \text{ est paire}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{\psi_n}(a-x) = f * \widehat{\psi_n}(a)$$

Or $\widehat{\Psi}_n$ est une approximation de l'unité donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \| f * \widehat{\Psi}_n - f \|_1 = 0.$$

Or $f * \widehat{\Psi}_n = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \| f * \widehat{\Psi}_n - f \|_1 = \lim_{n \to +\infty} \| f \|_1 = \| f \|_1$

Donc $\| f \|_1 = 0$ et $f = 0$.

L'application $\mathcal{F}$ étant linéaire, on en déduit que f est injective.

<u>Recasage:</u> 234 - 250 - 239 - 235 - 236 - 245 - 267

Questions : (4.)

1. Démontrer que si $f\in L^p$ et (φ_j) est une approxima° de l'unité, alors $f*\varphi_j \xrightarrow[j\to+\infty]{\|\cdot\|_p} f$

1ère étape: Mq si g est UC et bornée alors $(g*\varphi_j)$ CVU vers g. Voir dev 32.

2ème étape: Mq si $g\in C_c^0(\mathbb{R})$ alors $g*\varphi_j \xrightarrow[j\to+\infty]{\|\cdot\|_p} g$.

Soit $R>0$ tq $g(x)=0$ si $x\notin[-R,R]$.

On a : $g*\varphi_j(x) - g(x) = [g*\varphi_j(x)-g(x)]\left(1\!\!1_{x\in[-2R,2R]} + 1\!\!1_{x\notin[-2R,2R]}\right)$ (=) (*)

- Sur $[-2R,2R]$ g vérifie les hypothèses de la 1ère étape donc $\|(g*\varphi_j(x)-g(x))1\!\!1_{x\in[-2R,2R]}\|_\infty \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$

or $\|(g*\varphi_j(x)-g(x))1\!\!1_{x\in[-2R,2R]}\|_p = \left(\int_{-2R}^{2R}|g*\varphi_j(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$

$$\le \|g*\varphi_j - g\|_\infty (4R)^{1/p} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.$$

- Sur $[-2R,2R]^c$, g est nulle et si $|x|>2R$ et $|t|\le R$ alors $g(x-t)=0$ car $|x-t|>2R-R=R$

donc $\|g*\varphi_j(x)\times 1\!\!1_{x\notin[-2R,2R]}\|_p = \|\int_{|t|>R} g(x-t)\varphi_j(t)\,dt\|_p$

$$= \|g*(\varphi_j\times 1\!\!1_{x\notin[-R,R]})(x)\|_p.$$

Or $g\in L^p$ et $\varphi_j\times 1\!\!1_{x\notin[-R,R]}\in L^1$ d'où d'après question 2-23b :

$$\|g*\varphi_j(x)\times 1\!\!1_{x\notin[-2R,2R]}\|_p \le \|g\|_p \underbrace{\|\varphi_j\times 1\!\!1_{x\notin[-2R,2R]}\|_1}_{\xrightarrow[j\to+\infty]{} 0}$$ car φ_j est une AU.

Finalement $\|g*\varphi_j - g\|_p \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$. [Car par (*) : $\|g*\varphi_j - g\|_p \le \|\ldots 1\!\!1_{x\in[-2R,2R]}\|_p + \|\ldots\|_p$]

3ème étape: En déduire le th.

Par densité de $C_c^0(\mathbb{R})$ dans L^p, si $\varepsilon>0$, $\exists\, g\in C_c^0$ tq $\|f-g\|_p<\varepsilon$.

On a: $f*\varphi_j - f = (f-g)*\varphi_j + (g*\varphi_j) - g + g - f$

d'où $\|f*\varphi_j - f\|_p \le \underbrace{\|(f-g)*\varphi_j\|_p}_{\le \|f-g\|_p \underbrace{\|\varphi_j\|_1}_{=1} \text{ ques° 2-23b}} + \underbrace{\|g*\varphi_j - g\|_p}_{<\varepsilon \text{ d'après 2ème étape}} + \underbrace{\|g-f\|_p}_{\varepsilon}$

$$\le 3\varepsilon.$$

2. Pourquoi $\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-at^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$?

1ère étape: Comme la $t\mapsto e^{-at^2}\in L^1(\mathbb{R})$ [elle est continue et $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $|t|\to+\infty$]

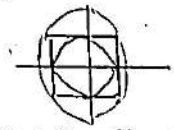
En considérant $(R_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $R_n\to+\infty$ et $f_n(t) = e^{-at^2}1\!\!1_{[-R_n,R_n]}$ le théorème de convergence dominée assure : $\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-at^2}\,dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\,dt$

2ème étape: Calculons $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt$.

Soit $R>0$, on note $C_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$ [le cercle de centre O et de rayon R]

$C_{\sqrt{2}R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2R^2\}$ [le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}R$]

$\square_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-R,R]$ et $y \in [-R,R]\}$ [le carré de coté R]

On a $C_R \subset \square_R \subset C_{\sqrt{2}R}$ [ $C_{\sqrt{2}R}$ C_R $\square_R$]

Comme C_R est bornée et que $\Phi : [0,2\pi] \times]0,R] \longrightarrow [-R,R] \times [-R,R]$, $(\theta, r) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un C^1-difféomorphisme

(on vérifie que c'est une bijection et que $\det J_\Phi = \begin{vmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = r \neq 0$)

On a d'après le théorème de changement de variable : $\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^R r e^{-r^2}\,dr\,d\theta$

$$\text{Fubini} \rightarrow = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R r e^{-r^2}\,dr\right)$$
$$= \frac{2\pi}{2}\left(1 - e^{-R^2}\right)$$

De même $\iint_{C_{\sqrt{2}R}} e^{-a(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi\left(1 - e^{-2R^2}\right)$

D'après Fubini-Tonelli : $\left(\int_{-R}^R e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \iint_{\square_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

Or comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive $\int_{C_R} \leq \int_{\square_R} \leq \int_{C_{\sqrt{2}R}}$ d'où : $\pi(1-e^{-R^2}) \leq \left(\int_{-R}^R e^{-t^2}\,dt\right)^2 \leq \pi(1-e^{-2R^2})$

D'où en faisant $R \to +\infty$: $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

<u>3ème étape:</u> On fait le changement de variable $T \mapsto \sqrt{a}\,t$: $\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-T^2}\,dT = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

3. Démontrer la formule de dualité:

Application simple de Fubini-Tonelli puis de Fubini.

4. Mq Si $g(x) = f(x)e^{iax}$ alors $\hat{g}(x) = \tau_a(\hat{f})(x)$.

Comme $f \in L^1$, on a $\|g\|_1 = \|f\|_1$ donc $\hat{g}$ bien déf et de plus : $\hat{f}(x-a) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it(x-a)}\,dt$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} e^{ita}\,dt$$
$$= \hat{g}(x)$$

5. Mq $\hat{\gamma}_n(t) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2n^2}{2}}$ est une approximation de l'unité.

et $f \geq 0$

On va montrer un fait plus général. Si f est tq $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$ alors $\varphi_n(t) = n f(nt)$ est une AU.

En effet : $\varphi_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} n f(nt)\,dt \underset{T=nt}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{n} f(T)\,dT = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, on a $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)\,dt = 1 = \int_{|t|>\varepsilon} \varphi_n(t)\,dt + \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} n f(nt)\,dt}_{\int_{-\varepsilon n}^{\varepsilon n} f(t)\,dt}$

$$\int_{-\varepsilon n}^{\varepsilon n} f(t)\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1 \text{ (par CVD)}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{|t|>\varepsilon} \varphi_n(t)\,dt = 0$ et φ_n est une AU.

En prenant $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ on a bien que $\hat{\gamma}_n$ est une AU.