VM
26/04/15
1

Géodésiques du demi-plan de Poincaré

201, 219, 228

Réf : FGN an 4

Soit H le 1/2-plan de Poincaré, i.e $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z > 0\}$.

Soient $A, B \in H$. Soit $V = \{v \in C^1([0,1], H),\ v(0) = A \text{ et } v(1) = B\}$

Pour tout $v \in V$, on pose $E(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{v_1'(s)^2 + v_2'(s)^2}{v_2(s)^2}\, ds$.

Théorème : Soit $v \in V$ minimisant E.

Alors $\operatorname{Im} v$ est soit incluse dans une droite verticale, soit dans un demi-cercle centré sur l'axe des abscisses.

Rem : (interprétation en terme de chemin minimisant l'énergie)

On munit H de la métrique $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

Ainsi, en tout point $M = (x, y)$ de H, on a défini un produit scalaire : $\langle u, v \rangle_M = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{y^2}$.

Soit $v \in V$. L'énergie de v relativement à la métrique définie ci-dessus

est $E(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 \langle v'(s), v'(s) \rangle_{v(s)}\, ds$

ce qui coïncide avec $E(v)$ définie plus haut.

---

dém : Soit v tel que $E(v)$ soit minimal.

Soit $F = \{w \in C^1([0,1], \mathbb{R}),\ w(0) = w(1) = 0\}$.

Soit $w = (w_1, w_2) \in F^2$.

Si λ est assez petit $v + \lambda w \in V$: en effet, $v \in V$ donc v_2 est continue sur $[0,1]$ et admet un minimum $\alpha > 0$.

Pour tout $s \in [0,1]$, $v_2(s) + \lambda w_2(s) \geq \alpha - |\lambda|\, \|w_2\|_\infty > 0$ dès que $|\lambda| < \frac{\alpha}{\|w_2\|_\infty}$ (ou pour tout λ si $w_2 \equiv 0$).

Soit $\beta = \frac{\alpha}{2\|w_2\|_\infty}$. Pour $\lambda \in [-\beta, \beta]$, $v + \lambda w \in V$.

Par hypothèse de minimalité, $\forall \lambda \in [-\beta, \beta]$, $E(v + \lambda w) \geq E(v)$.

Soit $\phi(\lambda) = E(v + \lambda w)$.

Montrons que ϕ est dérivable.

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{\frac{(v_1'(s)+\lambda w_1'(s))^2 + (v_2'(s)+\lambda w_2'(s))^2}{(v_2(s)+\lambda w_2(s))^2}}_{\psi(s,\lambda)} \, ds.$$

ψ est continue sur $\underbrace{[0,1]\times[-\beta,\beta]}_{=K}$ compact.

ψ est dérivable par rapport à λ et $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$ est continue sur K.

Les constantes étant intégrables sur le segment $[0,1]$, le théorème de convergence dominée assure que ϕ est dérivable sur $]-\beta,\beta[$ et $\phi'(\lambda) = \int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(s,\lambda)\, ds$.

En particulier, $\phi'(0) = 0$.

$$0 = \phi'(0) = \int_0^1 \left(\frac{w_1'v_1' + w_2'v_2'}{v_2^2} - \frac{(v_1'^2 + v_2'^2)w_2}{v_2^3} \right)(s)\, ds.$$

Ceci est valable pour tout $w = (w_1, w_2)$.

En prenant $w_2 = 0$, on a

$$\forall w_1 \in F, \quad \int_0^1 w_1' \frac{v_1'}{v_2^2} = 0.$$

<u>Lemme</u> : Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et que $\forall g \in F, \int_0^1 f g' = 0$, alors f est constante.

<u>dém</u> : Soit $h = f - \int_0^1 f$. On veut montrer que $h \equiv 0$.

h est continue sur $[0,1]$ et $\int_0^1 h = 0$. Soit $g(x) = \int_0^x h$.

Alors $g \in F$. Donc

$$\int_0^1 h^2 = \int_0^1 h\left(f - \int_0^1 f\right) = \int_0^1 hf - \int_0^1 f \underbrace{\int_0^1 h}_{=0}$$
$$= \int_0^1 g' f = 0.$$

Donc $h^2 \equiv 0 \Rightarrow h \equiv 0 \Rightarrow f$ est constante. $\square$

Ainsi, $\exists \alpha$ tel que $\frac{v_1'}{v_2^2} = \alpha$.

VM
26/04/15
2

Lorsque $w_1 = 0$, on a $\displaystyle\int_0^1 w_2' \frac{v_2'}{v_2^2} + w_2 f = 0$

où $f = \dfrac{v_1'^2 + v_2'^2}{v_2^3} = \alpha^2 v_2 + \dfrac{v_2'^2}{v_2^3}$.

Soit G une primitive de f.

Alors $\forall w_2 \in F$, $\displaystyle\int_0^1 w_2' \frac{v_2'}{v_2^2} = \int_0^1 w_2 f = \underbrace{\left[w_2 G\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 w_2' G$

donc d'après le lemme, $\dfrac{v_2'}{v_2^2} + G = \text{cste}$.

Comme G est dérivable, c'est aussi le cas de $\dfrac{v_2'}{v_2^2}$ et donc de v_2'.

On dérive : $\dfrac{v_2''}{v_2^2} - \dfrac{2v_2'^2}{v_2^3} + f = 0$

donc $\dfrac{v_2''}{v_2^2} + \alpha^2 v_2 - \dfrac{v_2'^2}{v_2^3} = 0$.

On a le système $\begin{cases} v_1' = \alpha v_2^2 \\ v_2'' v_2 + \alpha^2 v_2^4 - v_2'^2 = 0 \end{cases}$

Si $\alpha = 0$, v_1 est constante et A et B ont même abscisse.

Si $\alpha \neq 0$, on a :

$$\frac{v_2'' v_2 - v_2'^2}{v_2^2} + \alpha^2 v_2^2 = 0$$

donc $\left(\dfrac{v_2'}{v_2}\right)' + \alpha v_1' = 0$

Ainsi $\exists K_1$ tel que $\dfrac{v_2'}{v_2} + \alpha v_1 = K_1$

$(\times v_1' = \alpha v_2^2)$: $\alpha v_2' v_2 + \alpha v_1' v_1 = K_1 v_1'$

$\exists K_2$ tq $v_2^2 + v_1^2 - \dfrac{K_1}{2\alpha} v_1 = K_2$

$\mathcal{C}$ arc de cercle.

→ dév plus court :

Si A et B ont même abscisse, alors $\mathrm{Im}\, v$ est contenue dans la droite verticale (AB).

→ même démarrage jusqu'à : $\exists \alpha$ tel que $\frac{v_1'}{v_2^2} = \alpha$.

Ainsi, v_1' est de signe constant (le signe de α) :

v_1 est monotone, or $v_1(0) = v_1(1)$.

Donc v_1 est constant ($\alpha = 0$) et $\mathrm{Im}\, v$ est contenu dans une droite verticale.